

平均场博弈及其应用

翻译：卫雯奇

关于本文：

本文灵感源自 2009 年 1 月由让-米歇尔·拉斯里教授的学士课程。该课程基于三位作者的论文及他们开发的未发表材料。讲座期间未展示证明过程，现已补充完善。部分课堂快速涉及的议题亦已补充说明。因此本文内容远比实际的学士课程讲座更为丰富，但遵循相同指导原则——循序渐进地引入平均场博弈论的概念、方法论及数学工具。平均场博弈论由让-米歇尔·拉斯里与皮埃尔-路易·里昂于 2006 年创立，其早期成果与发展见于文献[34–36]：包含结构框架、核心概念、均衡定义、正向-反向哈密顿-雅可比-贝尔曼/柯尔莫哥洛夫方程系统、静态与动态情形下的存在性定理。

静态与动态情形下的存在定理、与纳什均衡的联系、当 N 趋于无穷时 N 人博弈理论中的动力学、去中心化变分原理等。此后让-米歇尔·拉斯里与皮埃尔-路易·里昂实施了多项拓展，其中若干成果与奥利维尔·盖昂合作完成：解的稳定性概念、特定数值方法、数值演绎算法，以及为更精确近似 N 人博弈而发展的 $1/N$ 展开。这些成果先后通过三期法国高等研究院课程[38]、巴谢利耶课程、多篇学术论文[23, 24]以及奥利维尔·盖昂的博士论文[23]进行系统阐述。相关应用（尤其在稀缺资源经济学领域）已实现或正在推进（合作者：皮埃尔·诺埃尔·吉罗、奥利维尔·盖昂、让-米歇尔·拉斯里、皮埃尔-路易·里昂）。奥利维尔·盖昂在种群动力学领域取得突破[23]。自 2008 年起，多位学者持续拓展该领域，或致力于探索马尔科夫随机游走模型的全新应用与特性[21, 33]。

1. 平均场博弈导论

平均场博弈理论作为博弈论分支，包含概念体系、数学工具、定理、模拟方法及算法。与所有博弈论领域相同，其旨在协助专家建模具有战略决策行为的经济主体。这些专家群体涵盖经济学家（微观/宏观）、社会学家、工程师乃至建筑师或城市规划师。无论如何，这些应用都源于本文开篇提出的首批“玩具模型”所构筑的理论图景。

我们选用“玩具模型”一词，旨在表明博弈论及其众多“范例”的特殊地位。以著名的“囚徒困境”为例，无人会将其故事当真，亦无人认为这个范例是为应用于它所模拟的现实情境而创造的。事实上，这则寓言旨在揭示战略互动的原型模式，这种原型模式在商业谈判等诸多情境中皆可辨识。我们的诸多案例具有类似属性。“会议几点开始”或“墨西哥波浪方程”等案例，亦不应被视为对社会生活情境的科学建模尝试。即便这两个例证模型确实蕴含真实元素，我们认为读者真正的兴趣点在于这些“玩具模型”所揭示的结构。例如墨西哥波浪方程，它展示了当行为主体的效用函数中存在某种模仿倾向时，如何在理性预期框架下，通过非合作个体行为构建出复杂的社会传播现象。

通过这些“玩具模型”引入平均场博弈，也是引导读者逐步掌握平均场博弈论概念与数学方法的途径。

本文呈现了大量研究成果与数学证明，但仅涵盖 2006 年以来建立的庞大数学体系的局部内容。因此对数学工作者而言，本课程可视为入门导论，或本著作既与平均场博弈的数学文献并行，亦与皮埃尔-路易·里昂在法国高等研究院开设的三门不同课程（06-07、07-08、08-09 学年）相呼应。这些课程完整呈现了该数学体系，可从法国高等研究院网站[38]下载。

1.1 三种不同路径

建模平均场博弈存在三条路径。每条路径都揭示了该理论的特定维度，三者相互补充。

1.1.1 第一路径：从物理学到平均场博弈

第一条路径源于粒子物理学。在粒子物理学中，平均场理论是一种高度有效的处理方法，适用于处理存在大量粒子时无法通过建模所有粒子间相互作用来描述动力学或平衡的情况。由于相互作用数量庞大，详细模型变得无效，因为难以理解且不适合计算和模拟，使得模型无法应用。

然而，在许多上述的情形中，通过引入一个或多个作为介质的“平均场”来描述粒子间的相互作用，可以构建出对实际情况的精妙近似。此类模型中，将每个粒子视为无限小量，从而描述其对平均场形成的贡献以及平均场对每个粒子的影响即通过对粒子数 N 进行极限处理 ($N \rightarrow \infty$)。

尽管并非所有粒子间相互作用类型都适用此方法，但多数类型可满足要求：粒子间相互作用必须足够“微弱”或“规律”，方能显现统计现象。

平均场博弈论将该方法论应用于粒子被社会经济和/或战略情境中相互作用的参与人取代的情形。其核心差异在于不仅需考虑参与人的决策能力，更需纳入战略互动能力，即每个参与人构建策略时需考虑其同伴，而同伴们则同时遵循各自独立策略的能力。

1.1.2 第二条路径：从博弈论到平均场博弈

从数学角度看，这条路径的研究最为充分：它涉及当 N 趋于无穷大时，对一大类 N 人博弈的极限进行研究。通常，含有 N 个参与者的微分博弈可以用一个 HJB–Isaacs 的偏微分方程组来概括，但该系统往往难以处理。幸运的是，至少在参与者数量增加时仍保持参与者对称的一大类博弈中，出于更深层的原因，情况会被简化。确实，随着参与者数量的增加，参与者之间那种复杂的、针对个体的策略将不再可行，因为在其他参与者眼中，每个参与者都会逐渐淹没在人群之中。

更准确地说，最适合进行这种极限过渡的博弈类别，是那种同一类型的参与者可以互换而不改变博弈本身的博弈：这是一种情境匿名性的形式，即没有任何东西依赖于个体。当地域中存在大量参与者时，这一假设在应用建模中尤其合适。从数学角度看，这种置换不变性的假设对于走向极限至关重要。

走向极限会产生这样一种情形：在其他参与者的整体群体之中，每个参与者都变得无穷小；他根据自身状态以及由无限数量共同参与者所构成的群体状态来构造自己的策略，而这些共同参与者也同时以同样的方式构造他们的策略。我们把这种每个参与者在共同参与者群体中的均衡称为平均场方法。

参与者连续体在文献中并不是新概念，自 Robert Aumann 及其关于具有无限多参与者的一般均衡的开创性论文以来（见[9]），这一思想就已被广泛使用。然而，我们的方法在许多方面不同于以往的研究（例如可参见关于大规模博弈的文献[29–32]）。一个例子是文献[34–36]以及[38]中发展并研究的那类特定的偏微分方程系统。另一个例子是用平均场博弈来近似一个 N 人博弈，并研究其 $1/N$ 量级的误差项（见我们的第一个玩具模型）。这种近似策略使我们能够对参与者的策略加以约束（因为无法再采用涉及特定参与者的复杂策略），从而把有限维博弈的复杂性压缩为一种颗粒度效应，这种效应会导致对参与者群体而言出现一个共同噪声。

1.1.3 第三条路径：从经济学到平均场博弈

在一般经济均衡理论中，经济主体彼此之间的关注很少：每个人只关注自身利益以及市场价格。其他主体的存在唯一会发挥作用的层面，是理性预期的假设。只有当每个主体都能通过把自己置于他人的位置来检验：他是否会发现理论所预测的行为时，一个理论才会在理性预期的意义下被视为可信。这是唯一一项能使一般均衡中的主体摆脱其唯我论状态的要求。换言之，在一般均衡理论中，价格中介了所有社会互动。然而我们知道，在许

多情形下还存在其他会引发主体之间互动的经济效应：外部性、公共品等。当把这些效应（而这通常是最常见的情况）以统计意义的方式纳入模型时，就会导向一种平均场类型（即上文所给定意义下）的主体间均衡定义。类似地，在产业经济学中，主体卷入复杂的信号传递体系、进入壁垒、相对于竞争对手的定位等问题；随着相关主体群体规模的扩大，这些问题也可以表现为平均场博弈的均衡。

主体之间的这些互动是经济学家最主要的关注点。他们希望理解价格如何通过理性行为而形成，以及外部性效应所带来的后果。此外，经济学家也关心经济的演化，因此他们在预期以及在跨期语境下价格（更一般地说，行为）如何形成这一问题上投入了大量时间。对经济物理学家而言，这一经济学领域显然是难以处理的，因为经济物理学只考虑不含预期的前向问题；即便涉及预期，也可能只是从某种启发式视角出发，从而使得后向维度消失。这也构成了平均场博弈理论与经济物理学家所研究的平均场之间的另一处差异：平均场博弈具有前向/后向的结构。在大多数平均场博弈模型中，我们不仅试图描述，而且更重要的是，试图使用效用最大化与理性预期这些经济学工具来解释某一现象。因此，平均场博弈理论更像是一套供经济学家使用的工具箱，而不是社会科学中一种全新的、相互竞争的范式——那种范式会回避对经济学家在过去几十年中取得的主要方法论进展的考量。

1.2 应用领域

1.2.1 平均场博弈与 N 人建模的对比

这三条路径为平均场博弈理论中对主体的表征方式奠定了基础。它们比经济学一般均衡中的主体更为精细：正如我们已经看到的，那里的主体对其共同主体大体上并不在意，只关心价格。反过来，平均场博弈理论中的主体又不如 N 人博弈理论中的参与者那样精细，因为他们的策略只建立在共同主体群体的统计状态之上。

尽管如此，与 N 人博弈理论的参与者相比，平均场博弈主体这种较低的精细度作为一种补偿，会在两个非常不同的方面产生广泛的正面效果：一方面体现在效率上，另一方面体现在应用领域的拓展上。

就效率而言，这种效率与可读性在很大程度上来自于可以运用微分学的力量。此外，这一优势也是平均场博弈与前述那些关于无限多参与者博弈的其他既有发展之间的差别之一。那些工作继承了 Robert Aumann 的杰出贡献，基本上像我们一样使用测度理论来表征参与者连续体，但它们只使用测度理论。从数学角度看，平均场博弈理论通过为微分学的广泛使用打开大门，走向了一个完全新的方向。微分学在大约 300 年来一直是最强大、最富有产出的工具之一，并且在过去几十年中，许多物理学之外的应用领域取得了重大进展：例如将偏微分方程（PDE）用于控制问题、Itô 或 Malliavin 随机微积分、随机偏微分方程（SPDE）、泛函分析的高级方法，等等。

此外，平均场博弈理论还促使该数学领域形成了一套新的、相对独立的发展体系，尤其体现在微分学与测度理论的交汇处，例如在 Wasserstein 空间几何方面的一些精细发展。应用领域的拓展：两个例子。

- 相对于 N 人博弈理论，一个显著的增益来自于对参与者进入与退出问题的处理更加容易。确实，通过用一个连续体来表征参与者，对参与者代际更新的建模不再是问题。就像时间与参与者在空间中的分布一样，状态是连续变量，而进入与退出则是简单的流，其技术处理并无特殊困难。因此，人们可以毫不费力地实现代际重叠模型。
- 由于在这些模型中，关于其他参与者的统计数据成为个体策略的基本组成部分，平均场博弈模型呈现出一种社会维度。从这个角度看，用平均场博弈极限来近似 N 人博弈（必要时再使用 $1/N$ 的修正项），使得这种方法即便在规模有限的群体中（比如只有几百个主体）也能将与参与者相关的社会维度引入分析。

鉴于与 N 人博弈相比所带来的这些益处，我们认为把平均场博弈视为解决 N 人博弈问题的解法是相当自然的。比如，考虑一个 N 较小（大约几十人量级）且存在参与者进入与退出的 N 人博弈。在大量情形下，平均场博弈极限很可能为 N 人解提供一个良好的第一近似，而 $1/N$ 展开中的第一项就足以以足够精度描述由“颗粒度”带来的效应（这种效应源于 N 是有限且相对较小这一事实）。

因此，平均场博弈模型拥有广泛的应用领域。它从带外部性的一般均衡一直延伸到“墨西哥人浪”，而在我们看来，从当下的视角出发，它的重心似乎是处于理性预期语境下的社会经济建模。

1.2.2 大量示例

为了展示平均场博弈理论的不同侧面，并指明其应用领域的一些内容，我们将在本课程的后部分介绍一系列玩具模型。换句话说，正如我们上面提到的，我们通常给出一些高度风格化的模型；这些模型不应被照字面理解，并且需要由专家加以重新加工，但它们展示了针对各种问题的应用之可能架构：

- 面对外部性时的协调与相互作用效应（会议时间）
- 有限资源的生产（石油峰值，Hotelling 规则）
- 社会领域中行为的模仿与传播（墨西哥人浪、名字、时尚等）
- 广场恐惧/广场偏好、身份认同的寻求等（平方-高斯人口模型）
- 存在信号问题时金融管理的扭曲（经理人与分类）
- 竞争对人力资本动态的影响（工资的帕累托型分布：负外部性产生正面效应的一个例子）

在展示这些玩具模型的过程中，相关的数学概念与方法，乃至整个平均场博弈的工具箱，将会逐步清晰显现。上文提到的那些讨论也将因此变得更为具体充实。

1.3 平均场方法的数学工具

将平均场博弈理论作为一种建模方法加以实施，使得人们需要写出一些新类型的方程系统，进而发展处理这些方程所必需的数学工具体系：关于解的存在性的定理、数值计算算法、稳定性的特定定义、变分原理，等等。

我们将在本课程的结论部分，回到读者能够通过这些例子所逐步发现的那套数学体系。

2. 会议什么时候开始

我们先以一个简化模型作为开头，将其构建为一系列情节，或者说是像老电视节目《翻倍你的财富》那样，其中戏剧性的张力会逐渐增强。在这里，我们将采用一种严肃的正误型问题：会议什么时候开始。

我们回顾一下在引言中关于简化模型作用的论述，其中囚徒困境就是一个典型的例子。不过，我们将如同进行科学研究那样，以越来越复杂、逐步深入的方式来处理这个问题。因此，我们先从一个相对简单的框架开始，然后逐渐增加各种困难，以使模型更具深度，同时揭示平均场博弈方法所提供的技术答案。在展示这个简化模型时，我们希望读者能体会到它适用于他们非常熟悉的实际例子。在下一节中，我们将提供一个关于长期石油产量的简化模型，以展示我们的简化模型如何在更严肃的背景下发挥作用。

2.1 简化模型

预定在某一时间 t 开始的会议往往会在预定时间过后几分钟才开始。会议实际开始时间 T 取决于参会人员到达的动态情况。如果规定会议在达到一定法定人数时开始，那么这一规则就建立了一种参与者之间的策略互动形式。我们将针对这种情况构建一种初步的平均场博弈方法。

我们设想一个有大量参与者参加的会议，并将这些参与者视为一个连续体的个体（稍后会给出理由）。个体都是理性的，并且了解情况。更确切地说，我们将为该问题提供的所有数据都是与会者所共知的。在这个模型中，有三个时刻是至关重要的：

- t ：会议的预定时间。
- τ^i ：考虑到当前的情况，智能体 i 希望的到达的时间。实际上，我们假设他的到达时间为 $\tilde{\tau}^i = \tau^i + \sigma^i \varepsilon^i$ ，其中 ε^i 是一个均值为 0、方差为 1 的随机噪声，仅针对特定的个体 i （即“个体特异性噪声”的假设，这种独立性的假设将使方程式变得简单，从而便于确定平衡状态。）。更确切地说， τ^i 是由个体 i 控制的一个变量，而 $\sigma^i \varepsilon^i$ 则是该个体所面临的一种不确定性因素。这些不确定性及其强度在不同群体的成员中存在差异，因为有些成员要远道而来参加会议，而有些则距离较近。我们用 m_0 来表示该群体中 σ^i 的分布情况。
- T ：会议开始的时间（关于如何根据参会人员的到达情况来确定会议开始时间 T 的规则将在后面给出）。

为了确定个体的到达时间，或者至少是他预计的到达时间，每个个体都会对一个总成本进行优化。为了便于说明（因为这是一个“简化模型”），我们假设这个总成本由三个部分组成：

- 与预定时间相比，迟到所产生的声誉影响：

$$c_1(t, T, \tilde{\tau}) = \alpha[\tilde{\tau} - t]_+$$

- 由于会议实际开始时间较原定时间有所推迟而带来的不便（个人上的不便）：

$$c_2(t, T, \tilde{\tau}) = \beta[\tilde{\tau} - T]_+$$

- 与等待时间（即等待到达时间 T 所耗费的时间）相对应的等待时间成本：

$$c_3(t, T, \tilde{\tau}) = \gamma[T - \tilde{\tau}]_+$$

我们将这三项成本的总和记为 $c(t, T, \tilde{\tau})$ ，该总和是 $\tilde{\tau}$ 的凸函数。我们可以通过假设根据智能体的不同值来设定 c_1 、 c_2 、 c_3 来使模型更加复杂，但我们的目标恰恰相反：为了便于解释该方法，我们要使其简单化。

2.1.2 解

每个参与者的优化问题就是最小化其预期总成本。在具有理性预期的纳什-平均场博弈均衡中，假定每个参与者都基于已知的 T 值进行优化。 T 本质上是一个随机变量，但由于我们考虑的是无限数量的参与者，根据“大数定律”，这将意味着 T 是确定性的，从现在起我们将考虑一个确定性的 T 。

对于参与者 i 的问题为：

$$\tau^i = \operatorname{argmin} \mathbb{E} [c(t, T, \tilde{\tau}^i)], \quad \tilde{\tau}^i = \tau^i + \sigma^i \tilde{\epsilon}^i$$

这里， T 表示“平均场”，即每个参与者对其他参与者行为的全面概括。

该任务旨在证明存在一个不动点 T ，即证明在假设已知 T 的情况下，参与者的优化行为能够完全促成 T 的实现。

为了证明这种均衡状态确实存在，首先必须更仔细地研究参与者的个体选择，这可以通过获取一阶条件来实现。

命题 1（一阶最优条件）：对于具有 σ 值等于 σ^i 的参与者而言，其最优解 τ^i 由以下公式隐含确定：

$$\alpha \mathcal{N} \left(\frac{\tau^i - t}{\sigma^i} \right) + (\beta + \gamma) \mathcal{N} \left(\frac{\tau^i - T}{\sigma^i} \right) = \gamma$$

其中 \mathcal{N} 是与正态分布相关的累积分布函数。

证明：

要最小化的表达式是：

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [\alpha [\tilde{\tau}^i - t]_+ + \beta [\tilde{\tau}^i - T]_+ + \gamma [T - \tilde{\tau}^i]_+] \\ &= \mathbb{E} [\alpha [\tilde{\tau}^i - t]_+ + (\beta + \gamma) [\tilde{\tau}^i - T]_+ - \gamma (\tilde{\tau}^i - T)] \\ &= \alpha \mathbb{E} ([\tau^i - t + \sigma^i \tilde{\epsilon}^i]_+) + (\beta + \gamma) \mathbb{E} ([\tau^i - T + \sigma^i \tilde{\epsilon}^i]_+) - \gamma (\tau^i - T) \end{aligned}$$

该问题的第一阶条件为：

$$\begin{aligned} & \alpha \mathbb{P} (\tau^i - t + \sigma^i \tilde{\epsilon}^i > 0) + (\beta + \gamma) \mathbb{P} (\tau^i - T + \sigma^i \tilde{\epsilon}^i > 0) = \gamma \\ & \alpha \mathcal{N} \left(\frac{\tau^i - t}{\sigma^i} \right) + (\beta + \gamma) \mathcal{N} \left(\frac{\tau^i - T}{\sigma^i} \right) = \gamma \end{aligned}$$

由于 \mathcal{N} 是一个严格单调的累积分布函数，并且由于这三个参数 α 、 β 和 γ 都为正数，因此可以很容易地推导出 τ^i 的存在性和唯一性。

根据 τ^i 与 (t, T, σ^i) 的这种函数关系，我们可以推导出各参与者到达的动态规律。为此，我们首先考虑连续体中 σ^i 的分布 m_0 。由于是连续体且遵循大数定律，这种分布会由 $\sigma^i \mapsto \tilde{\tau}^i$ 的作用而发生转移。

因此，如果我们定义 F （确定的）为参与者的实际到达时间的累积分布函数，那么根据函数 $F(\cdot)$ 来确定会议的实际开始时间 T 就是自然而然的事情了。一个多数原则的例子：会议会晚于预定时间开始，并且只有当一定比例 θ 的参与者到达后才会开始。

接下来，我们必证明存在且唯一存在一个不动点。从一个值 T 开始，我们得出参与者的最优策略 $(\tau^i(\cdot; T))_i$ 。这些最优策略就是目标到达时间，但每个人的到达时间都会受到噪

声的影响：我们得到实际的到达时间 $(\tau^i(\cdot; T))_i$ 。然后，根据大数定律和参与者的不确定性相互独立的假设，这些到达时间按照 F 的分布呈现确定性特征，而 T 则通过会议开始时间规则 $(T^*(F))$ 从 F 中推导出来（在本例中为多数派）。这一过程可以简单地概括为以下方案：

$$T^{**} : T \mapsto (\tau^i(\cdot; T))_i \mapsto (\tilde{\tau}^i(\cdot; T))_i \mapsto F = F(\cdot; T) \mapsto T^*(F)$$

我们得到的结果如下：

命题 2 (Equilibrium T)： 如果 $\alpha > 0$ ， $\beta > 0$ ， $\gamma > 0$ ，并且 $0 \notin \overline{\text{supp}(m_0)}$ ，那么 T^{**} 是一个在区间 $[t, +\infty)$ 上的压缩映射，我们的问题存在唯一的解 T 。

证明：

首先，我们对 T 进行求导，以得出定义 τ^i 的一阶条件。

$$\frac{d\tau^i}{dT} \left[\alpha \mathcal{N}' \left(\frac{\tau^i - t}{\sigma^i} \right) + (\beta + \gamma) \mathcal{N}' \left(\frac{\tau^i - T}{\sigma^i} \right) \right] = (\beta + \gamma) \mathcal{N}' \left(\frac{\tau^i - T}{\sigma^i} \right)$$

由于 0 不在 m_0 的支持范围内，这导致了 $\frac{d}{dT} \tau(t, \sigma; T) \leq k < 1$ 。因此对于 $\forall T, s, h > 0$,

$$\begin{aligned} F(s; T + h) &= \mathbb{P}(\tau^i(\sigma^i; T + h) + \sigma^i \epsilon^i \leq s) \geq \mathbb{P}(\tau^i(\sigma^i; T) + kh + \sigma^i \epsilon^i \leq s) \\ &= F(s - kh; T) \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} T^*(F(\cdot; T + h)) &\leq T^*(F(\cdot - kh; T)) \leq T^*(F(\cdot; T)) + kh \\ &\Rightarrow T^{**}(T + h) - T^{**}(T) \leq kh \end{aligned}$$

这就通过压缩映射定理证明了结果。

值得注意的是，多数表决的情况并非特殊，因为上述证明仅需遵循 T 设置规则 $(T^*: F(\cdot) \mapsto T)$ ，即可验证上述结果成立所需的以下属性：

- $\forall F(\cdot), T^*(F(\cdot)) \geq t$ ：会议永远不会早于预定时间。
- 单调性：假设有两个累积分布函数 $F(\cdot)$ 和 $G(\cdot)$ 。如果 $F(\cdot) \leq G(\cdot)$ ，则有 $T^*(F(\cdot)) \geq T^*(G(\cdot))$ 。
- 次加性： $\forall s > 0$ ， $T^*(F(\cdot - s)) - T^*(F(\cdot)) \leq s$

在更普遍的情况下，当成本与 F 有关时，战略互动不再仅仅取决于时间 T 。很自然的是，每个参与者的社会成本取决于他到达时已经到场的参与者所占的比例。在这种更普遍的情况下， F 是平均场：每个人根据 F 做出自己的决策。作为回报，这些决策会构建出 F 。从数学角度来看，这个不动点与 F 有关。

2.2 变体

有许多方法可以对这个最初的“简化模型”进行完善。例如，有一种变体是同时考虑共同的干扰因素以及个体特有的干扰因素。这是一个重要的变体，因为它展示了群体动态具有随机性这一情况。不过，由于这会导致过于冗长的论述，所以我们在此不会考虑这个变体。

我们将要介绍的变体是一个“地理模型”，即参与者最初分布在不同的地方，并且必须前往会议举行的地方。

这种变体的有趣之处在于，它将展示如何出现耦合的向前/向后偏微分方程（这是平均场博弈理论的核心内容。在连续时间、连续状态空间的背景下），从而体现出该理论的实质。

2.2.1 框架

我们假设所有参与者的位置分布在实数轴的负半轴上，他们的位置分布由函数 $m_0(\cdot)$ 描述。这个初始分布 m_0 有紧支撑（也就是人不会分布到无限远，很远的地方没人），而且 $m_0(0) = 0$ ，意思是一开始在 0 这个点上没人，所有人都离会议地点有点距离，0 是会议地点的空间位置。假设为了从起点移动到位置 0，任意一个参与者 i 的位置 X_t^i 随时间演化满足随机微分方程 $dX_t^i = a_t^i dt + \sigma dW_t^i$ 。他的位置演化是“可控的平均速度+随机扰动”。

- X_t^i : 时刻 t 时第 i 个参与者离 0 的位置（负数表示在左边还没到）。
- a_t^i : 参与者 i 在时刻 t 选择的“速度/控制”（漂移，决定平均移动方向和速度），这是参与者可以控制的。漂移 a 是参与者可以控制的决策变量，但选择一个大小为 a 的控制要付出一个二次成本 $0.5a^2$ 。
- σdW_t^i : 噪声项（布朗运动），表示路上有不确定性，比如交通随机干扰。这里假设噪声强度 σ 对所有参与者都是一样的。

其中，在这个模型里，随机不确定性的程度对每个参与者相同，只是他们选择的控制 a_t^i 不同。这种假设在这一运输不确定性示例中是一种理想化的表述。但在实际应用中，我们会发现这个假设其实还挺合适的。

因此，每个参与人 i 都面临着一个优化问题，其表述形式为：

$$\text{Min}_{a(\cdot)} \mathbb{E} \left[c(t, T, \tilde{\tau}^i) + \frac{1}{2} \int_0^{\tilde{\tau}^i} a^2(t) dt \right]$$

- $\mathbb{E}[\cdot]$: 运动中有布朗运动噪声，所以总成本是随机的，用期望来衡量平均成本；
- $c(t, T, \tilde{\tau}^i)$: 到达会议时间 $\tilde{\tau}^i$ 时产生的成本；
- $\frac{1}{2} \int_0^{\tilde{\tau}^i} a^2(t) dt$: 控制的成本，每时刻花 $0.5a^2(t)$ 成本，从 0 积分到到达时间 $\tilde{\tau}^i$ 。

其中，位置过程满足 $X_0^i = x_0, dX_t^i = a_t^i dt + \sigma dW_t^i$ 。到达位置 0 的时间为 $\tilde{\tau}^i = \min \{s | X_s^i = 0\}$ （第一次位置过程 X_s^i 碰到 0 的时刻）。

如果我们要寻找一个 Nash 型的平均场均衡，那么我们会在一个给定的 T 下来思考。此时每个参与者的问题就是一个随机控制问题：给定 T ，选择控制过程 a ，最小化上面的期望成本。因此，我们有以下的 HJB 方程：

$$0 = \partial_t u + \min_a \left(a \partial_x u + \frac{1}{2} a^2 \right) + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 u$$

定义值函数（cost-to-go）： $u(t, x)$ =从时间 t 、位置 x 出发，在最优控制下的最小期望总成本。这个方程可以写成：

$$(HJB) \quad \partial_t u - \frac{1}{2} (\partial_x u)^2 + \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 u = 0$$

在边界（极限）处的条件很简单，即 $\forall \tau, u(\tau, 0) = c(t, T, \tau)$ ，其中 T 像前面一样可以看作是确定的。 $x = 0$ 表示已经到达会议地点。当位置 $x = 0$ 时，之后不再有运动、不再发生控制成本，此时剩余成本只由到会时刻的惩罚决定。若在时间 τ 到达 0，则相对于预定时间 T 和真实开会时间 T ，到会成本是 $c(t, T, \tau)$ 。这个条件对应的正是到达会议时的总成本。

我们将假定 c 的形状与前一节设定中的相同，意味着早到惩罚、晚到惩罚的基本结构不变，只是把折线函数成光滑函数。为了 HJB 方程的解析性质更好，在这里要求 c 不是分段线性的，而是二次连续可微的。

HJB 方程给出了一个 Bellman 函数 u ，从而在给定 T 的情况下刻画出各个参与者的最优行为。由于所有参与者具有相同的成本准则，只是在初始时刻的出发位置不同，因此这条

方程对所有参与者都是相同的。此外，与大多数随机优化问题一样，这里的解是马尔可夫型的，因此对应的策略，也就是最优控制 $a(s, x) = -\partial_x u(s, x)$ ，只依赖于位置 x 和时间 s 。因此，特别地，这个策略并不依赖于具体是哪一个参与者：那些由于各种未知因素而在时间 s 来到同一位置 x 的参与者，会采取相同的策略；这也是自然的，因为他们拥有相同的信息、相同的运输成本以及相同的终端准则。这种性质简化了问题的表达。

然后，由“大数定律”通过 Kolmogorov 方程给出参与者的分布 m 。宏观上，可以用一个连续的密度函数 $m(t, x)$ 来描述“在时间 t 、位置 x 还有多少人”。这个分布对应的是尚未到达 0 的参与者的分布，因此当参与者逐渐到达会议地点时， m 会“失去质量”（通过 0 流出）。 m 的动力学方程为：

$$(Kolmogorov) \quad \partial_t m + \partial_x ((-\partial_x u)m) = \frac{\sigma^2}{2} \partial_{xx}^2 m$$

初始条件 $m(0, \cdot) = m_0(\cdot)$ ， $t = 0$ 各个位置上的密度就是之前假定好的 $m_0(x)$ 。我们将试图寻找满足以下“光滑拼接”条件的解： $m(\cdot, 0) = 0$ ，在 $x = 0$ 处，不再把人计入 m 。

另外，由于我们选择用布朗扩散的动力学来建模，该模型必须补充并限定在一个紧致区域上。在随后的证明中，我们假设定义域是 $[0, T_{\max}] \times [-X_{\max}, 0]$ ，并且边界条件为：

$$u(T_{\max}, \cdot) = c(t, T, T_{\max}), \quad u(\cdot, -X_{\max}) = c(t, T, T_{\max}), \quad m(\cdot, -X_{\max}) = 0$$

- $u(T_{\max}, x) = c(t, T, T_{\max})$:
 - 若时间已经到了 T_{\max} ，不论还在什么位置，都视为“停止”，并按到达时间为 T_{\max} 来计算终端成本；
 - 因此值函数在 $t = T_{\max}$ 这一条边上等于同一个终端成本。
- $u(t, -X_{\max}) = c(t, T, T_{\max})$:
 - 若人在最远的左边界 $-X_{\max}$ ，也视同“退出”，同样给一个终端成本（这里简化成同一个数）。
- $m(t, -X_{\max}) = 0$:
 - 在最远位置 $-X_{\max}$ 没有人（或把流出该边界的人视作离开系统），因此密度为 0。

在该框架下，到达 0 的流量（即参与者到达会议地点的流量）由映射 $s \mapsto -\partial_x m(s, 0)$ 给出。因此，到达时间的累积分布函数 F 定义为：

$$F(s) = - \int_0^s \partial_x m(v, 0) dv$$

现在， T 由 quorum 规则确定（例如设定阈值 $\theta = 90\%$ ），同时我们要求 T 必须落在区间 $[t, T_{\max}]$ 内。换句话说：

$$T = \begin{cases} t, & \text{if } F^{-1}(\theta) \leq t \\ T_{\max}, & \text{if } F(T_{\max}) \leq \theta \\ F^{-1}(\theta), & \text{otherwise} \end{cases}$$

2.2.2 会议开始时间均衡状态的存在性

就像在前面那个简单模型中一样，我们需要证明：存在一个时间 T ，它与所有参与者（在理性意义下）的预期是一致的。和之前一样，我们使用不动点定理。我们先从一个给定的 T 出发，可以得到对应的 u 。然后 Kolmogorov 方程给出 m ，从而得到在 0 点的到达流量。由于在我们的例子中，时间 T 是由“到达人数达到全部人中比例 θ ”这个条件决定的，所以显然这是一个不动点问题。

在深入数学细节之前，我们先给出一些假设：

- 假设映射 $T \mapsto c(t, T, \tau)$ 是连续函数
- 假设映射 $\tau \mapsto c(t, T, \tau)$ 是 C^2 函数

- 假设 $m_0(0) = m_0(-X_{\max}) = 0$ 。此外，还假设 $|m'_0(0)| > 0$ 并且 $|m'_0(-X_{\max})| > 0$

现在，我们考虑下面这个“流程”（其中涉及到的函数空间，将在后文中被证明确实是合适的）：

$$\begin{aligned} T \mapsto c(t, T, \cdot) \in C^2 \mapsto u \in C^2 \mapsto \partial_x u \in C^1 \mapsto m \in C^1 \\ \mapsto -\partial_x m(\cdot, 0) \in C^0(\mapsto F) \mapsto T \end{aligned}$$

由于这个流程是从区间 $[t, T_{\max}]$ 映射回同一个区间 $[t, T_{\max}]$ ，为了得到不动点结果，我们只需要证明这个流程是连续的。

这个流程的第一部分 $(T \mapsto c(t, T, \cdot) \in C^2)$ 依据前面的假设已经是连续且良好定义的。对于流程的第二部分 $(c(t, T, \cdot) \in C^2 \mapsto u \in C^2)$ ，我们只需要陈述一个引理：

引理 1： 我们考虑下面这个偏微分方程：

$$(HJB) \quad \partial_t u - \frac{1}{2}(\partial_x u)^2 + \frac{\sigma^2}{2}\partial_{xx}^2 u = 0$$

边界条件

$$\begin{aligned} u(\cdot, 0) = c(t, T, \cdot) \quad u(T_{\max}, \cdot) = c(t, T_{\max}, T_{\max}), \quad u(\cdot, -X_{\max}) \\ = c(t, T_{\max}, T_{\max}) \end{aligned}$$

该方程的解 u 属于 $C^2([0, T_{\max}[\times] - X_{\max}, 0])$ ，并存在一个常数 K ，使得对所有 $T \in [t, T_{\max}]$ ， $\partial_x u$ 是一个 K -Lipschitz 函数。此外，从 $c(t, T, \cdot) \in C^2$ 到 $u \in C^2$ 的映射是连续的。

现在我们已经得到了 u ，从而得到了控制 $-\partial_x u$ ，于是可以转向 Kolmogorov 方程。我们给出一个引理，它是 Hopf 原理的一个应用。

引理 2： 我们考虑下面这个偏微分方程：

$$(Kolmogorov) \quad \partial_t m + \partial_x(am) = \frac{\sigma^2}{2}\partial_{xx}^2 m$$

其中 a 是一个 C^1 （因此也是 Lipschitz）函数，边界条件为 $m(0, \cdot) = m_0(\cdot)$ ， $m(\cdot, 0) = 0$ ， $m(\cdot, -X_{\max}) = 0$ ，且 m_0 满足前面给出的那些假设。那么该方程的解 m 属于 $C^1((0, T_{\max}) \times (-X_{\max}, 0))$ ，并且

$$\exists \epsilon > 0, \inf |\partial_x m(\cdot, 0)| \geq \epsilon$$

另外，这个 ϵ 仅依赖于函数 a 的 Lipschitz 常数。此外，从 a 到 $m \in C^1$ 的映射是连续的。

由前面这两个引理，我们可以推得一个适合于本问题的第三个引理。确实，由于 u 是一个 C^2 函数， $a = -\partial_x u$ 是一个 Lipschitz 函数，因此我们对到达会议地点的流量有一个下界：

引理 3：

$$\exists \epsilon > 0, \forall T \in [t, T_{\max}], \inf |\partial_x m(\cdot, 0)| \geq \epsilon$$

现在，我们考虑这样一个映射，这个映射是上面用 quorum rule 定义出来的。我们将要证明：只要 $-\partial_x m(\cdot, 0)$ 有一个严格正的下界，那么映射 Ψ 就是连续的。

引理 4： 映射 Ψ 在空间 $C^0([0, T_{\max}], \mathbb{R}_+^*)$ 上是一个 Lipschitz 函数。

证明： 取两条函数 ψ_1, ψ_2 ，表示两种可能的到达流量；设有一个公共的下界 $\epsilon > 0$ ，使得这两个函数都不小于 ϵ 。然后定义 $T_1 = \Psi(\psi_1)$ ， $T_2 = \Psi(\psi_2)$ 。如果 T_1 和 T_2 都位于开区间 (t, T_{\max}) 内，那么在假设 $T_1 \leq T_2$ 的情况下，我们可以写出：

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{T_1} \psi_1 - \int_0^{T_2} \psi_2 = \int_0^{T_1} (\psi_1 - \psi_2) - \int_{T_1}^{T_2} \psi_2 \\
&\Rightarrow \epsilon(T_2 - T_1) \leq \int_{T_1}^{T_2} \psi_2 = \int_0^{T_1} (\psi_1 - \psi_2) \leq T_{max} |\psi_1 - \psi_2|_\infty
\end{aligned}$$

因此，在这种情形下，函数是 Lipschitz 的。

在所有其他情形下，在同样假设 $T_1 \leq T_2$ 的前提下，我们不再有上面的等式，而是有下面的不等式：

$$\int_0^{T_1} \psi_1 - \int_0^{T_2} \psi_2 \geq 0$$

并且结论可以用同样的推理得到。

因此，这个函数是 Lipschitz 的，从而也是连续的。

到目前为止，我们已经证明整个“流程”是连续的，因此利用 Brouwer 不动点定理，可以得到均衡时间 T 的存在性。

命题 3 (存在性)： 由预期时间 T 定义实际时间 T 的这一流程是连续的，并且至少有一个不动点。因此，至少存在一个均衡时间 T 。

2.2.3 评论

这个变体是一个连续时间平均场博弈的很好例子，而其中的机制在很多模型里都会是类似的。首先，各个参与者要预期整体群体的演化动态，因此他们预期一个 m 。在这里，关键的信息被浓缩成一个 T ，而 T 是 m 的函数，因此他们要预期 T ，就必须先预期 m 。在形成了这样的预期之后，参与者根据 HJB 方程所描述的“向后推理”来做决策。接着，由这个方程得到的个体行为（最优控制），可以被代入正向方程（Kolmogorov 方程），从而得到由个体行为所诱导出的整体群体的真实动态。最后，“理性预期”假设要求：预先假定的 m 必须与真实产生出来的 m 彼此一致。

这种“向后-向前”相结合的机制，是连续时间平均场博弈理论的核心，我们稍后还会在别的例子里再次看到它的具体运作。

2.3 平均场博弈均衡作为 N 人博弈 Nash 均衡的极限

2.3.1 引言

为简明起见，我们回到最开始的那个模型。现在通过考虑一个有 N 个玩家的博弈，回到“连续体假设”上来了。为了表述简单，而且因为这里其实就是一个“玩具模型”，我们仍然考虑上面那个相同的特殊情形（这个特殊情形在技术上其实挺麻烦的，因为目标函数并不光滑，但在直观上非常形象）在这个模型中，当有一部分参与者达到比例 θ 时，会议就开始（为了简化，我们假设 $\theta = 90\%$ ，但我们仍然要求会议开始时间 T 处在区间 $[t, T_{max}]$ 之内）和前面一样，不能比最早允许时间 t 还早，也不能晚于某个最大容忍时间 T_{max} 。另外，我们假设所有参与者具有相同的 σ 。在这样的设置下，一些自然的问题就出现了：

- 这个 N 人博弈是否存在 Nash 均衡？
- 这样的均衡是否唯一？
- 当 $N \rightarrow \infty$ 时， N 人博弈的均衡是否会趋向于平均场博弈的均衡？
- 若有需要，我们是否知道这种收敛的速度？

这个情形本身很简单，但它的好处在于——由于我们（在对称情形下）将会对上面那些问题都给出肯定答案——它为“用平均场博弈来逼近一个 N 人博弈”铺平了道路。把一

个 N 人博弈通过一阶展开“ $G_0 + \frac{1}{N}G_1 + \dots$ ”来近似的这种例子，其中（形式上） G_0 是平均场博弈， G_1 是一阶修正项，这种思路会导向一种“新的 N 人博弈均衡解的类型”。“ $G_0 + \frac{1}{N}G_1$ ”的解，所反映的是这样一个策略世界：在这个世界里，个体并不关心其他某一个具体的对手（至少在个体层面上不关心），而只关心总体人群的演化。并且这是一个这样的世界 N ，也就是玩家数量，只是被引入来刻画博弈的“颗粒度”，以及“连续体假设”并不完全精确这一点。

2.3.2 N 人博弈的解

为简化起见，我们假设玩家数是 $N = 10k$ （ $k = 1, 2, 3, \dots$ ），于是会议在第 $9k$ 个玩家到达时开始。给定一个玩家（比如玩家 1），他会希望选择一个到达时间 τ^* ，这个 τ^* 应当满足下列（对称 Nash 条件）：

$$\tau^* = \underset{\tau_1}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}[C(\tau^1 + \sigma\varepsilon^1, \tau^* + \sigma\varepsilon^2, \dots, \tau^* + \sigma\varepsilon^N)]$$

实际上，这个函数 C 并不真正依赖于 $(\tau^* + \sigma\varepsilon^2, \dots, \tau^* + \sigma\varepsilon^N)$ 的所有分量，而只依赖于其中两个顺序统计量： $\tau^* + \sigma\tilde{\varepsilon}_{(9k-1)}$ 和 $\tau^* + \sigma\tilde{\varepsilon}_{(9k)}$ ，即第 $9k-1$ 个到达的人和第 $9k$ 个到达的人。其中， $\tilde{\varepsilon}_{(r)}$ 表示集合 $\{\varepsilon^2, \dots, \varepsilon^N\}$ 排序后第 r 个元素。

因此，Nash 均衡可以用下面的方式刻画：

$$\tau^* = \underset{\tau_1}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E}[G(\tau^1 + \sigma\varepsilon^1, \tau^* + \sigma\tilde{y}, \tau^* + \sigma\tilde{z})]$$

其中 (\tilde{y}, \tilde{z}) 是顺序统计量，对应于集合 $\{\varepsilon^2, \dots, \varepsilon^N\}$ 排序后第 $(9k-1)$ 个和第 $9k$ 个元素。因此，随机变量 (\tilde{y}, \tilde{z}) 与 ε^1 是相互独立的。回到最原始的模型，函数 G 定义如下：

$$\forall a, \forall b, \forall c \geq b, \quad G(a, b, c) = G(a, t \vee b \wedge T_{\max}, t \vee c \wedge T_{\max})$$

$$\forall b \leq c \in [t, T_{\max}], G(a, b, c) = \begin{cases} -\gamma(a-b) & a \leq t \\ -\gamma(a-b) + \alpha(a-t) & a \in (t, b] \\ \alpha(a-t) & a \in (b, c] \\ \alpha(a-t) + \beta(a-c) & a > c \end{cases}$$

引理 5：对 $\forall b, \forall c \geq b$ ，映射 $a \mapsto G(a, b, c)$ 是连续的、分段线性的、凸的函数。

函数 G 在优化时不方便，引入函数 H ： $(\tau^1, b, c) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} G(\tau^1 + \sigma x, b, c) \mathcal{N}'(x) dx$ ，其中 \mathcal{N} 是方差为 1 的正态随机变量的分布函数。

引理 6： $\forall b \leq c$ ，函数 H 是关于 τ^1 的严格凸函数，而且它先单调减、再单调增。并且有下面这些导数公式（ $t \leq b \leq c \leq T_{\max}$ ）：

$$\begin{aligned} \partial_1 H(\tau^1, b, c) = & \left[-\gamma \mathcal{N}\left(\frac{b-\tau^1}{\sigma}\right) + \alpha \left(1 - \mathcal{N}\left(\frac{t-\tau^1}{\sigma}\right)\right) \right. \\ & \left. + \beta \left(1 - \mathcal{N}\left(\frac{c-\tau^1}{\sigma}\right)\right) \right] \end{aligned}$$

$$\partial_{11}^2 H(\tau^1, b, c) = \frac{1}{\sigma} \left[\gamma \mathcal{N}'\left(\frac{b-\tau^1}{\sigma}\right) + \alpha \mathcal{N}'\left(\frac{t-\tau^1}{\sigma}\right) + \beta \mathcal{N}'\left(\frac{c-\tau^1}{\sigma}\right) \right]$$

$$\partial_{12}^2 H(\tau^1, b, c) = -\frac{1}{\sigma} \gamma \mathcal{N}'\left(\frac{b-\tau^1}{\sigma}\right)$$

$$\partial_{13}^2 H(\tau^1, b, c) = -\frac{1}{\sigma} \alpha \mathcal{N}'\left(\frac{c-\tau^1}{\sigma}\right)$$

证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(\tau^1 + \sigma x, b, c) \mathcal{N}'(x) dx = \frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} G(t, b, c) \mathcal{N}'\left(\frac{t - \tau^1}{\sigma}\right) dt$$

因此，我们可以对 τ^1 进行求导，得到：

$$\begin{aligned} \partial_1 H(\tau^1, b, c) &= -\frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} G(t, b, c) \mathcal{N}''\left(\frac{t - \tau^1}{\sigma}\right) dt \\ &= -\frac{1}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} G(\tau^1 + \sigma x, b, c) \mathcal{N}''(x) dx \end{aligned}$$

然后，利用广义导数（在分布意义下）我们得出：

$$\begin{aligned} \partial_1 H(\tau^1, b, c) &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_1 G(\tau^1 + \sigma x, b, c) \mathcal{N}'(x) dx \\ \partial_1 H(\tau^1, b, c) &= \int_{-\infty}^{\infty} [-\gamma 1_{\tau^1 + \sigma x \leq b} + \alpha 1_{\tau^1 + \sigma x \geq t} + \beta 1_{\tau^1 + \sigma x \geq c}] \mathcal{N}'(x) dx \\ \partial_1 H(\tau^1, b, c) &= \left[-\gamma \mathcal{N}\left(\frac{b - \tau^1}{\sigma}\right) + \alpha \left(1 - \mathcal{N}\left(\frac{t - \tau^1}{\sigma}\right)\right) \right. \\ &\quad \left. + \beta \left(1 - \mathcal{N}\left(\frac{c - \tau^1}{\sigma}\right)\right) \right] \end{aligned}$$

再次求导得到：

$$\partial_{11}^2 H(\tau^1, b, c) = \frac{1}{\sigma} \left[\gamma \mathcal{N}'\left(\frac{b - \tau^1}{\sigma}\right) + \alpha \mathcal{N}'\left(\frac{t - \tau^1}{\sigma}\right) + \beta \mathcal{N}'\left(\frac{c - \tau^1}{\sigma}\right) \right]$$

这个量是严格正的，因此， H 作为第一个变量 τ^1 的函数是严格凸的。由于 $H(\tau^1, b, c) = \mathbb{E}[G(\tau^1 + \sigma \bar{e}^1, b, c)] \geq G(\mathbb{E}[\tau^1 + \sigma \bar{e}^1], b, c) = G(\tau^1, b, c)$ ，因此 H 必然是先单调递减，然后再单调递增的。

其余导数可以直接算得：

$$\partial_{12}^2 H(\tau^1, b, c) = -\frac{1}{\sigma} \gamma \mathcal{N}'\left(\frac{b - \tau^1}{\sigma}\right)$$

$$\partial_{13}^3 H(\tau^1, b, c) = -\frac{1}{\sigma} \alpha \mathcal{N}'\left(\frac{c - \tau^1}{\sigma}\right)$$

现在回忆一下：我们要寻找的是一个对称的 Nash 均衡，其条件可以写成：

$$\tau^* = \operatorname{argmin}_{\tau^1} \mathbb{E}[G(\tau^1 + \sigma \tilde{e}^1, \tau^* + \sigma \tilde{y}, \tau^* + \sigma \tilde{z})]$$

显然，这个条件可以用函数 H 重新写成：

$$\tau^* = \operatorname{argmin}_{\tau^1} \mathbb{E}[H(\tau^1, \tau^* + \sigma \tilde{y}, \tau^* + \sigma \tilde{z})]$$

利用与上述最小化问题对应的一阶条件，我们可以看到：我们需要更好地理解函数 $\partial_1 H$ 。接下来的引理将会对后续分析有帮助，因为它在问题中引入了紧性的性质。

引理 7：

$$B = \{\tau^1 | \exists b \leq c, \partial_1 H(\tau^1, b, c) = 0\}$$

是一个有界集合。

证明：

我们刚刚引入的集合，其实就是：对所有满足 $b \leq c$ 的二元组 (b, c) ，函数 H 取得极小值时对应的那些点所组成的集合。由于对任意 $a, b, c \geq b$ 都有 $G(a, b, c) = G(a, t \vee b \wedge T_{\max}, t \vee c \wedge T_{\max})$ ，同样的性质也适用于 H 。因此，我们的集合 B 也可以写成：

$$\{\tau^1 | \exists(b, c), t \leq b \leq c \leq T_{\max}, \partial_1 H(\tau^1, b, c) = 0\}$$

现在，方程 $\partial_1 H(\tau^1, b, c) = 0$ 以隐式的方式定义了一个函数 $\tau^1(b, c)$ ，这个函数是连续的。于是，集合 B 是一个紧集（从而是有界的）：它是有界集合 $\{(b, c) | t \leq b \leq c \leq T_{\max}\}$ 在一个连续映射之下得到的像。

现在我们引入玩家 1 的最佳反应函数。这个函数记为 Γ ，定义为：

$$\Gamma(\tau^*) = \operatorname{argmin}_{\tau^1} \mathbb{E}[H(\tau^1, \tau^* + \sigma \tilde{y}, \tau^* + \sigma \tilde{z})]$$

这个函数的另一个（虽然是隐式的）定义，是基于—阶条件：

$$\mathbb{E}[\partial_1 H(\Gamma(\tau^*), \tau^* + \sigma \tilde{y}, \tau^* + \sigma \tilde{z})] = 0 \quad (*)$$

引理 8：

$$\forall \tau^*, \inf B \leq \Gamma(\tau^*) \leq \sup B$$

证明：

由于 H 对第一个变量（ τ^1 ）是先单调递减再单调递增的，我们现在可以很清楚地看到：对 $\forall \xi < \inf B$ ，都有

$$\mathbb{E}[\partial_1 H(\xi, \tau^* + \sigma \tilde{y}, \tau^* + \sigma \tilde{z})] < 0$$

因此 $\inf B \leq \Gamma(\tau^*)$ 。另一边的不等式可以用同样的推理得到。

由于 Nash 均衡本质上就是 Γ 的一个不动点，我们可以把 Γ 限制在集合 $K = [\inf B, \sup B]$ 上来考虑。

如果我们定义 $\Gamma_K: \tau^* \in K \mapsto \Gamma(\tau^*)$ 为 Γ 在 K 上的限制，那么任何对称 Nash 均衡都必须是 Γ_K 的一个不动点。

现在，在给出存在唯一性定理之前，我们还需要最后一个引理，它表述如下：

引理 9： Γ_K 是一个从 K 到 K 的压缩映射。

证明：

回到由 (*) 给出的函数 Γ 的隐式定义。利用隐函数定理，可以得到：

$$\Gamma'(\tau^*) = - \frac{\mathbb{E}[\partial_{12}^2 H(\Gamma(\tau^*), \tau^* + \sigma \tilde{y}, \tau^* + \sigma \tilde{z}) + \partial_{13}^2 H(\Gamma(\tau^*), \tau^* + \sigma \tilde{y}, \tau^* + \sigma \tilde{z})]}{\mathbb{E}[\partial_{11}^2 H(\Gamma(\tau^*), \tau^* + \sigma \tilde{y}, \tau^* + \sigma \tilde{z})]}$$

由于 $0 < -\partial_{12}^2 H - \partial_{13}^2 H < \partial_{11}^2 H$ ，于是得到 $0 \leq \Gamma'(\tau^*) < 1$ 。由于 K 是紧集，存在一个常数 $\varepsilon > 0$ ，使得对所有 $\tau^* \in K$ 都有 $\Gamma'_K(\tau^*) \leq 1 - \varepsilon$ 。

现在应用一个经典的不动点定理，我们得到：

命题 4（存在性与唯一性）： 对这个 N 人博弈，存在唯一的对称 Nash 均衡。

备注：为了简化讨论，我们只在 $N = 10k$ 、 $\theta = 90\%$ 的情形下证明了上述结论，但实际上，这个结果对任意的 N 和 θ 都成立。

2.3.3 以 $1/N$ 为阶的近似

在开始分析之前，先回忆一下：在平均场博弈（MFG）情形下，因为所有个体的 σ 都相同，均衡的分布是一个 Dirac 质量（也就是集中在一个点的分布）。我们用 τ_{MFG}^* 来记这个

均衡。会议开始的时间（除非碰到边界）是 $\tau_{MFG}^* + \sigma F^{-1}(\theta)$, 其中 F 是一个正态分布的累积分布函数。

因此，与其用下面这个条件来定义均衡：

$$\mathbb{E}[\partial_1 H(\tau_N^*, \tau_N^* + \sigma \tilde{y}, \tau_N^* + \sigma \tilde{z})] = 0$$

平均场博弈的均衡则由下面的条件给出：

$$\partial_1 H(\tau_{MFG}^*, \tau_{MFG}^* + \sigma F^{-1}(\theta), \tau_{MFG}^* + \sigma F^{-1}(\theta)) = 0$$

可以看出，引入函数 $J(t, y, z) = \partial_1 H(t, t + \sigma y, t + \sigma z)$ 是有好处的，这样我们就可以对 J 做下面的 Taylor 展开。

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{E}J(\tau_N^*, \tilde{y}, \tilde{z}) \\ &= \underbrace{J(\tau_{MFG}^*, F^{-1}(\theta), F^{-1}(\theta))}_{=0} + (\tau_N^* - \tau_{MFG}^*) \partial_1 J(\tau_{MFG}^*, F^{-1}(\theta), F^{-1}(\theta)) \\ &\quad + \mathbb{E}(\tilde{y} - F^{-1}(\theta)) \partial_2 J(\tau_{MFG}^*, F^{-1}(\theta), F^{-1}(\theta)) \\ &\quad + \mathbb{E}(\tilde{z} - F^{-1}(\theta)) \partial_3 J(\tau_{MFG}^*, F^{-1}(\theta), F^{-1}(\theta)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E}(\tilde{y} - F^{-1}(\theta))^2 \partial_{22} J(\tau_{MFG}^*, F^{-1}(\theta), F^{-1}(\theta)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{E}(\tilde{z} - F^{-1}(\theta))^2 \partial_{33} J(\tau_{MFG}^*, F^{-1}(\theta), F^{-1}(\theta)) \\ &\quad + \mathbb{E}(\tilde{z} - F^{-1}(\theta))(\tilde{y} - F^{-1}(\theta)) \partial_{23} J(\tau_{MFG}^*, F^{-1}(\theta), F^{-1}(\theta)) \\ &\quad + o(\tau_N^* - \tau_{MFG}^*) + o(1/N) \end{aligned}$$

对顺序统计量（即 \tilde{y}, \tilde{z} ）性质的精细研究（参见文献[17]）表明， τ_N^* 向 τ_{MFG}^* 的收敛是在 $1/N$ 的量级上发生的。

实际上，如果我们作如下记号：

$$\begin{aligned} \xi &= \lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E}(\tilde{y} - F^{-1}(\theta)) \in \mathbb{R} \\ \zeta &= \lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E}(\tilde{z} - F^{-1}(\theta)) \in \mathbb{R} \\ v &= \lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E}(\tilde{y} - F^{-1}(\theta))^2 \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E}(\tilde{z} - F^{-1}(\theta))^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E}(\tilde{z} - F^{-1}(\theta))^2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

这样我们就得到

$$\tau_N^* = \tau_{MFG}^* - \frac{1}{N} \frac{1}{\partial_1 J} \left[\xi \partial_2 J + \zeta \partial_3 J + \frac{v^2}{2} (\partial_{22} J + \partial_{33} J + 2\partial_{23} J) \right] + o\left(\frac{1}{N}\right)$$

因此，当 N 很大时，平均场博弈框架就可以看作是 N 人博弈的一个近似模型，而且我们还知道：在用 MFG 模型来求解 N 人博弈时，其误差的量级是怎样的。

3. 平均场博弈论在经济学中的应用：可枯竭资源的生成

一个相当典型的平均场博弈例子，是由“连续体的生产者”共同开采一种可枯竭资源的情形。我们从 Hotelling 的经典工作中（见文献[28]）知道，在可枯竭资源的生产中会存在“资源租”。但是在一个竞争性的环境下更深入地考察这一点、并理解稀缺资源被逐渐开采耗尽的动态，是很有意思的。因此，我们先给出一个基础模型，以后可以在这个模型上嫁接出其他更复杂的模型。比如，这个模型可以被改进，用来考虑 Stackelberg 型竞争，或者考虑市场中存在“大玩家”（我们想到的例子是 OPEC 这样的石油输出国组织），等等。这个模型同样可以作为基底，用来研究一些重要问题，比如新竞争者进入市场，尤其是那些开发替代能源的企业（文献[20]在一个与本章完全相同的平均场博弈框架下，对这个问题做了完整分析）。利用这一框架，我们还可以用有力的分析工具，研究“政府补贴替代能源生产者”在碳排放方面可能带来的负面效应（参见[25]，以及类似的[18]）。

通过这个例子，我们可以展示平均场博弈中的前向/后向偏微分方程（PDE）的普遍结构，同时也提供了一种清晰处理外部性问题的方法。

3.1 模型的基本设定

我们考虑大量的石油生产者，它们可以被看作一个个油井，也可以从更宏观的层面看作一家公司。我们唯一的假设是：这些生产者的数量足够多，以至于可以采用一些简单的假设，比如“连续体假设”（适合做平均场博弈建模），以及“完全竞争”（每个主体都是价格接受者）。

每一个石油生产者一开始都有一个储量，记作 R_0 。我们假设这些储量在各个生产者之间按照某个（初始）分布 $m(0, \cdot)$ 分配。显然，这些储量会被用于生产 q ，并且对任意一个具体的生产者，我们有 $dR(t) = -q(t) dt + \nu R(t) dW_t$ ，其中 W_t 是该生产者特有的布朗运动。

生产决策是为了最大化下面这样的利润指标（对所有生产者都是同一个形式）：

$$\text{Max}_{(q(t))_t} \mathbb{E} \int_0^\infty (p(t)q(t) - C(q(t)))e^{-rt} ds \quad s.t. \quad q(t) \geq 0, R(t) \geq 0$$

其中：

- C 是成本函数，我们会把它写成二次型： $C(q) = \alpha q + \beta \frac{q^2}{2}$
- 价格 p 由每一时刻市场上的供给/需求均衡来决定。时刻 t 的需求由某个函数 $D(t, p)$ 给出，可以写成 $D(t, p) = W e^{\rho t} p^{-\sigma}$ ，其中 $W e^{\rho t}$ 表示整体财富，并以常数增长率 ρ 增长，用来刻画经济增长； σ 是需求的弹性，在更一般的模型里可以解释为“石油和其他商品之间的替代弹性”。供给自然就是所有生产者的总产量。

我们的模型既可以在确定性情形下处理，也可以在随机性情形下处理，这取决于参数 ν 的取值。

我们将先从确定性情形开始，也就是取 $\nu = 0$ 。在这种情况下，可以在不使用平均场方法的前提下求解。平均场方法会在随机情形下变得必要，而那时经济学上的均衡会作为这个 PDE 系统的一个很特殊的解出现，同时也为我们在模型中加入外部性或更复杂的设定留下空间。

3.2 确定性模型

3.2.1 均衡的刻画

命题 5（确定性情形下的均衡）：在确定性情形下，均衡由下面这些方程来刻画，其中 p, q ,

λ 都是未知函数， R_0 是初始石油储量：

$$D(s, p(s)) = \int q(s, R_0) m_0(R_0) dR_0$$

$$q(s, R_0) = \frac{1}{\beta} [p(s) - \alpha - \lambda(R_0) e^{rs}]_+$$

$$\int_0^\infty q(s, R_0) ds = R_0$$

证明：

先考虑一个石油生产者，它的初始储量是 R_0 。它的最优产量路径可以用拉格朗日函数来求：

$$\mathcal{L} = \int_0^\infty (p(s)q(s) - C(q(s)))e^{-rs} ds + \lambda \left(R_0 - \int_0^\infty q(s) ds \right)$$

一阶条件为：

$$p(s) = C'(q(s)) + \lambda e^{rs}$$

其中的 λe^{rs} 就是所谓的 Hotelling 租。值得注意的是，如果考虑的是垄断者，那么价格就不会是“边际成本+租”，而是“边际成本+租”再乘上一个通常的加成系数（markup）。换句话说，市场势力越强，实际获得的租就越大。

现在，利用前面给的成本函数形式，在 $q(s) > 0$ 的时候我们得到：

$$p(s) - \alpha - \beta q(s) = \lambda e^{rs}$$

因此， $q(s)$ 可以写成：

$$q(s) = \frac{1}{\beta} [p(s) - \alpha - \lambda e^{rs}]_+$$

在这个等式中， λ 取决于初始油量（或储量），我们记作 $\lambda(R_0)$ 。这个拉格朗日乘子的取值由那个“跨期约束”决定，该约束要求整个时间上的生产总量等于初始储量：

$$\int_0^\infty q(s, R_0) ds = \frac{1}{\beta} \int_0^\infty (p(s) - \alpha - \lambda(R_0) e^{rs})_+ ds = R_0$$

现在我们要确定刚才没写出来的价格。这很简单，由需求=供给条件给出：

$$D(s, p(s)) = \int q(s, R_0) m_0(R_0) dR_0$$

把以上所有结果综合起来，就得到刻画均衡的那三条方程。

3.2.2 均衡的计算

由于产量函数 q 只依赖于 $\lambda(\cdot)$ 和 $p(\cdot)$ ，我们就可以完全把变量 t 和 R_0 分开来处理。更具体地说，如果我们采用一种 **eductive** 算法（后面用来解耦合 PDE 也会用到这种算法），我们可以先对两个函数 $\lambda(\cdot)$ 和 $p(\cdot)$ 做一个“猜测”，用它们来计算 $q(\cdot, \cdot)$ ，然后再利用下面这两个约束来更新 $\lambda(\cdot)$ 和 $p(\cdot)$ ：

$$\int_0^\infty q(s, R_0) ds = R_0; \quad D(s, p(s)) = \int q(s, R_0) m_0(R_0) dR_0.$$

更具体地，我们考虑一个由变量 θ 索引的动态系统，如下所示：

$$\partial_{\theta} p(t, \theta) = D(t, p(t, \theta)) - \int q(t, R_0) m_0(R_0) dR_0$$

$$\partial_{\theta} \lambda(R_0, \theta) = \int_0^{\infty} q(t, R_0) dt - R_0$$

其中,

$$q(t, R_0) = \frac{1}{\beta} [p(t, \theta) - \alpha - \lambda(R_0, \theta) e^{rt}]_+$$

一旦选定了这样的动态系统, 函数 $R_0 \mapsto \lambda(R_0)$ 和 $t \mapsto p(t)$ 的解 (也因此得到所有油企的产量路径) 就可以通过下面的极限来得到:

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} p(t, \theta) = p(t)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} \lambda(R_0, \theta) = \lambda(R_0)$$

作为例子, 我们在这个模型中考察总石油产量的演化, 并采用 CES 形式的需求函数: $D(t, p) = W e^{\rho t} p^{-\sigma}$.

我们取如下参数值: 油企使用的利率为 $r = 5\%$, 世界经济的平均增长率为 $\rho = 2\%$; 生产一桶油的初始边际成本为 $\alpha = 10$; 取 $\beta = 100$ 来刻画产能约束的重要性; 取 $\sigma = 1.2$, 因为石油的需求弹性并不高; 取 $W = 40$ 以便在模型里得到合理数量级的数值。问题在 150 年的时间跨度上考察, 初始储量分布的形状如图 1 所示。

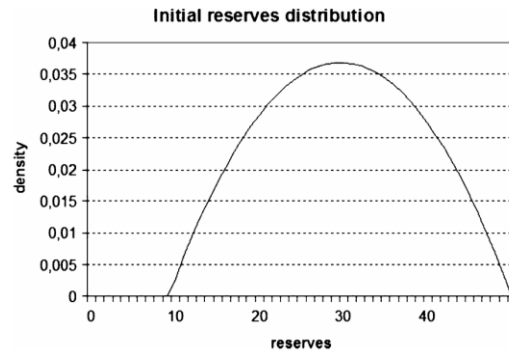


图 1. m_0

如果我们看所有油企的总产量, 它的演化由下方的第一个图 (图 2) 给出: 横轴是年份, 纵轴是每个日期的总产量。相应的油价演化也画出来了, 不过我们只画了前 50 年, 以免经过太多年代之后数值变得非常大, 使得图像难以阅读 (图 3)。

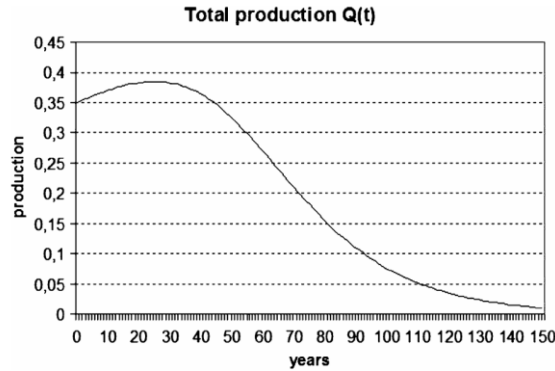


图 2. 石油总产量的演化

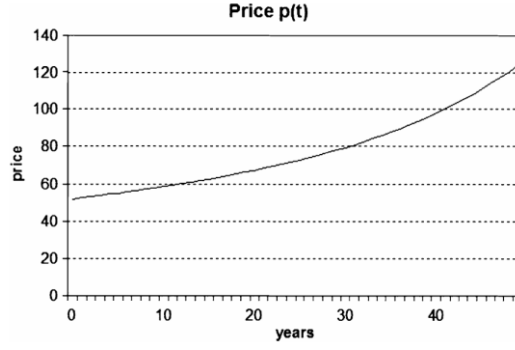


图 3. 50 年价格的演化

3.2.3 对确定性模型的评价

这个确定性模型，对大多数读者来说会显得比较“经典/传统”。不过，其中有点值得特别评论。首先，我们已经看到，价格并不等于边际成本，因为最优产量（在为正的情况下）满足：

$$p(t) = C'(q(t, R_0)) + \lambda(R_0)e^{rt}$$

因此，这个 Hotelling 租 $\lambda(R_0)e^{rt}$ 会随时间增加，并且在不同生产者之间也是不同的。由于 λ 测度的是“由于石油可枯竭性带来的约束强度”，它是 R_0 的一个递减函数。因此，当我们看一个较小的生产者时，它的资源租会更高。

另一个值得注意的现象是曲线的形状：石油产量先上升，然后下降。这是一种所谓 Hubbert 峰（Hubbert peak）的形式，尽管我们这里并没有得到经典 Hubbert 峰所具有的对称性结果。经济增长会推动石油生产者增加产量（尤其是那些储量很大的生产者），但石油本身的可枯竭性又会在经过一段时间之后，促使产量下降。

3.3 随机模型

上面的模型，和一般的一般均衡经济模型一样，是一个平均场博弈。在前面构建的那个简单的确定性情形中，其实并不一定要用平均场博弈的工具，经典的工具就足够了（除了在求数值解时可能会用到 MFG 的算法思想）。但是，一旦在模型里引入噪声（随机性）或者外部性，就必须使用平均场博弈的偏微分方程（PDE）。与第一章玩具模型中出现的 PDE 相比，这里得到的 PDE 将会是完全耦合的，而不只是通过边界条件进行耦合。

3.3.1 平均场博弈的 PDE

为了写出方程我们先引入 $u(t, R)$ ，它是这个问题的 Bellman 函数（价值函数），也就是：

$$u(t, R) = \max_{(q(s))_{s \geq t}, q \geq 0} \mathbb{E} \int_t^\infty (p(s)q(s) - C(q(s)))e^{-r(s-t)} ds$$

$$s.t. dR(s) = -q(s)ds + \nu R(s)dW_s, R(t) = R$$

与这个最优控制问题对应的 HJB 方程为：

$$(HJB) \quad \partial_t u(t, R) + \frac{\nu^2}{2} R^2 \partial_{RR}^2 u(t, R) - ru(t, R) + \max_{q \geq 0} (p(t)q - C(q) - q \partial_R u(t, R)) = 0$$

现在，我们用 $m(t, R)$ 表示时刻 t 时“石油储量的分布”。这个分布是由各个油企在最优策略 $q^*(t, R)$ 下的生产决策所推动的。此时， R 表示的是时刻 t 的当前储量，而不再像确定性情形中那样表示初始储量。对应的输运（transport）方程是：

$$(Kolmogorov) \quad \partial_t m(t, R) + \partial_R(-q^*(t, R)m(t, R)) = \frac{\nu^2}{2} \partial_{RR}^2 [R^2 m(t, R)]$$

并且 $m(0, \cdot)$ 是已知的。

现在，让我们讨论一下 u 和 m 之间的相互依赖关系。和 u 的联系很自然，因为 m 是由 HJB 方程给出的最优控制所决定的、各个代理人的最优决策所“运输”出来的。这一最优控制是：

$$q^*(t, R) = \left[\frac{p(t) - \alpha - \partial_R u(t, R)}{\beta} \right]_+$$

另一方面， u 又通过价格 $p(t)$ 依赖于 m ，而这个价格可以看成是 m 的一个函数。确实，因为 $p(t)$ 要被设定成“供需相等”，所以有：

$$p(t) = D(t, \cdot)^{-1} \left(-\frac{d}{dt} \int Rm(t, R) dR \right)$$

如果我们想在这一部分做个总结，并且把方程改写成只突出这种相互依赖的形式，我们可以写成下面这样：

$$\begin{aligned} & \partial_t u(t, R) + \frac{\nu^2}{2} R^2 \partial_{RR}^2 u(t, R) - ru(t, R) \\ & + \frac{1}{2\beta} \left[\left(D(t, \cdot)^{-1} \left(-\frac{d}{dt} \int Rm(t, R) dR \right) - \alpha - \partial_R u(t, R) \right)_+ \right]^2 = 0 \\ & \partial_t m(t, R) + \partial_R \left(- \left[\frac{D(t, \cdot)^{-1} \left(-\frac{d}{dt} \int Rm(t, R) dR \right) - \alpha - \partial_R u(t, R)}{\beta} \right]_+ m(t, R) \right) \\ & = \frac{\nu^2}{2} \partial_{RR}^2 (R^2 m(t, R)) \end{aligned}$$

上面这两条就是与我们的最优化问题对应的耦合方程。不过，要证明“某个 HJB 方程的解真的是原来优化问题的价值函数并且给出了真正的最优策略”，还需要一个验证定理，这是一个有趣但在这里不展开的问题。

3.3.2 泛化与外部性

上面为了突出 u 和 m 的相互依赖，我们把方程写成了那样的形式；但那种写法不太实用，也不如前面的形式直观。不过，那些方程表达了一个我们想特别强调的重要事实：传统意义上的一般均衡，其实可以看成平均场博弈的一个非常特殊的情形。直接的推论是：在平均场博弈框架下，我们可以很简单地把别的效应加进去，只要在 PDE 里加上一些有意义的项就行。

举个例子，石油业内的人普遍认为：油企不只是想最大化利润，他们还不想成为最后一批还在生产的企业，因为在“石油时代结束”的时候，他们不知道油企会发生什么事。

这种效应，如果用我们一开始介绍的（那种传统的）做法，是非常难加进去的。而在平均场博弈的做法下，要添加这样的效应，只不过是在定义 u 的那个 HJB 方程里，多加一个对 m 的依赖项而已。一种做法是：在 HJB 方程里加入一个“排名效应”的项。这样，HJB 方程就可以变成：

$$\begin{aligned} & \partial_t u(t, R) + \frac{\nu^2}{2} R^2 \partial_{RR}^2 u(t, R) - ru(t, R) + H \left(\int_0^R m(t, \varphi) d\varphi \right) \\ & + \frac{1}{2\beta} \left[\left(D(t, \cdot)^{-1} \left(-\frac{d}{dt} \int Rm(t, R) dR \right) - \alpha - \partial_R u(t, R) \right)_+ \right]^2 = 0 \end{aligned}$$

这里的 H 是一个递减函数。也就是说，除了跨期利润最大化之外，生产者还希望自己

的剩余油量少于竞争对手。

上面这种泛化只是众多可能性中的一个。我们只是想说服读者：平均场博弈方法可以很轻松地处理各种各样的效应，尤其是各种外部性效应。如果了解这种平均场博弈如何被用来研究现有油企与潜在进入者（生产替代能源的公司）之间的竞争，可以参见文献[25]和[20]。

4. 墨西哥人浪

4.1 引言

在进入更复杂的模型之前，我们先看一个“玩具模型”，它受到平均场博弈的启发，用来刻画体育场里产生墨西哥人浪的模仿行为。

之所以叫“墨西哥人浪”，是因为好像是最早在墨西哥的体育场里出现的。我们这个模型的目标，是要理解：在一个有无穷多观众、并且大家都有“爱模仿”的偏好的平均场博弈里，“人浪”这种模式怎么会成为一种均衡解。先描述一下体育场的几何形状。为了简化问题，我们把体育场看成一个周长为 L 的圆环，因此它是一个一维的对象（虽然推广到更高维并不难）。从数学上，我们把体育场表示成区间 $[0, L)$ ，并且两端连在一起当作圆环（拓扑学上是一个环面）。

看台上有连续分布的观众，每个观众对应一个位置 $x \in [0, L)$ 。每个观众可以自由选择姿势，可以完全坐着（ $z = 0$ ）、完全站着（ $z = 1$ ），也可以在之间的任何中间姿势 $0 < z < 1$ 。某些姿势比另外一些更不舒服，我们用一个效用函数 $u(z)$ 来描述这种舒适度差异。

一个典型的选择如下，这样可以体现站着或坐着比中间姿势更舒服：

$$u(z) = -Kz^\alpha(1-z)^\beta$$

现在，我们来描述对于任一参与者的优化方程：

- 如果观众以速度 a 改变自己的姿势（每个小时间段里把 z 改成 $z + a dt$ ），就要付出代价 $h(a) dt$ ， $h(a) = \frac{a^2}{2}$ 。

- 观众希望自己的行为跟附近人的行为相似。数学上，对于位置 x 的观众，引入这样一项：

$$-\frac{1}{\epsilon^2} \int (z(t, x) - z(t, x - y))^2 \frac{1}{\epsilon} g\left(\frac{y}{\epsilon}\right) dy$$

其中 g 是一个高斯核函数。

- 每个观众还要考虑自身姿势带来的舒适度 $u(z)$ ，希望这个效用大。

对于位置 x 的观众，他要在所有可能的时间路径 $t \mapsto z(t, x)$ 中，选择一个使下面这个量最大的路径：

$$\sup_{z(\cdot, x)} \liminf_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ \left[-\frac{1}{\epsilon^2} \int (z(t, x) - z(t, x - y))^2 \frac{1}{\epsilon} g\left(\frac{y}{\epsilon}\right) dy \right] + u(z(t, x)) - \frac{\dot{z}(t, x)^2}{2} \right\} dt$$

这个长期平均控制问题可以形式化地转成一个微分方程，得到：

$$-\frac{2}{\epsilon^2} \int (z(t, x) - z(t, x - y))^2 \frac{1}{\epsilon} g\left(\frac{y}{\epsilon}\right) dy + u'(z(t, x)) = -\partial_{tt}^2 z(t, x)$$

如果令 $\epsilon \rightarrow 0$ （邻居范围越来越小），在分布意义下，上面的积分项收敛到空间二阶导数，于是我们的方程变成：

$$\partial_{tt}^2 z(t, x) + \partial_{xx}^2 z(t, x) = -u'(z(t, x))$$

在继续解这个方程之前，我们要注意：常数解 $z = 0$ 和 $z = 1$ 应该都是方程的解。因此，我们必须有 $u'(0) = u'(1) = 0$ ，从而前面效用函数中的参数 α 和 β 必须都严格大于1。

4.2 墨西哥人浪看作一种解

墨西哥人浪，从定义上说，就是一种波。因此我们将寻找形如 $z(t, x) = \varphi(x - vt)$ 的解，其中 v 是波的传播速度。但我们平时所说的墨西哥人浪，通常是一种具体形状的波，我们希望把“墨西哥人浪”定义成这样一种函数 φ ：它在区间 $(0, L)$ 上具有紧支撑，并且先从 0 单调上升到 1，然后再从 1 单调下降到 0。

若我们寻找这样的函数 φ ，很容易看出它必须满足：

$$(1 + v^2)\varphi'' = -u'(\varphi)$$

命题 6（当 $\alpha, \beta \in (1, 2)$ 时墨西哥人浪的存在性）：假设 $\alpha, \beta \in (1, 2)$ 。那么，对任意满足：

$$\frac{\Gamma(1 - \frac{\alpha}{2})\Gamma(1 - \frac{\beta}{2})}{\Gamma(2 - \frac{\alpha+\beta}{2})} < \sqrt{\frac{K}{2(1 + v^2)}}L$$

的 v ，都存在一个“墨西哥人浪”型的函数 φ ，它是方程 $(1 + v^2)\varphi'' = -u'(\varphi)$ 的解。

证明：

我们用“能量方法”（energy method）来解方程 $(1 + v^2)\varphi'' = -u'(\varphi)$ 。首先，把方程两边同乘 φ' 再积分，得到：

$$\frac{1 + v^2}{2} \varphi'^2 = -u(\varphi) + C.$$

由于 $\varphi = 0$ 必须是一个解，因此常数 C 必须为 0。于是我们得到如下常微分方程：

$$\varphi' = \pm \sqrt{\frac{2K}{1 + v^2}} \varphi^{\alpha/2} (1 - \varphi)^{\beta/2}$$

如果 $\alpha > 2$ ，那么利用边界条件 $\varphi(0) = 0$ 或 $\varphi(L) = 0$ ，Cauchy–Lipschitz 定理（即 Picard–Lindelöf 唯一性定理）就会告诉我们：唯一的解是 $z = \varphi \equiv 0$ 。现在因为我们假设的是 $\alpha \in (1, 2)$ ，我们就可能得到局部的“非唯一性”。

我们来构造一个不同于 0 的解。首先，我们可以令 φ 在 0 附近为 0，例如对所有 $s \in [0, \eta]$ 都令 $\varphi(s) = 0$ 。此后对 $s > \eta$ ，我们对上面的常微分方程积分，并通过下式隐式地定义 $\varphi(s)$ ：

$$\int_0^{\varphi(s)} w^{-\alpha/2} (1 - w)^{-\beta/2} dw = \sqrt{\frac{2K}{1 + v^2}} (s - \eta)$$

当 $\varphi(s) \leq 1$ 时，上面的定义是成立的，也就是说，只要 $s \leq M$ 就行，其中 M 被定义为 $B(1 - \alpha/2, 1 - \beta/2) = \sqrt{\frac{2K}{1 + v^2}} (M - \eta)$ ，这里 B 表示 Beta 函数。现在，对 $s > M$ ，我们以同样方式在另一侧构造解，而且之所以可以这样做，是因为 $\beta \in (1, 2)$ 。我们通过下式隐式地定义 $\varphi(s)$ ：

$$\int_{\varphi(s)}^1 w^{-\alpha/2} (1 - w)^{-\beta/2} dw = \sqrt{\frac{2K}{1 + v^2}} (s - M)$$

只要 $\varphi(s)$ 仍然为正即可。这个条件在某个 $s = M'$ 处失效，此时 $B(1 - \alpha/2, 1 - \beta/2) = \sqrt{\frac{2K}{1 + v^2}} (M' - M)$ 。现在规定，当 $s \geq M'$ 时， $\varphi(s) = 0$ 。

我们已经构造了一个可微的函数 φ ，但还需要检查：对足够小的 η 来说，是否可以保证 $M' < L$ 。我们有 $2B(1 - \alpha/2, 1 - \beta/2) = \sqrt{\frac{2K}{1 + v^2}} (M' - \eta)$ 。因此， M' 能小于 L 当且仅当存在某个 η 使得

$$\eta < L - \sqrt{\frac{2(1+v^2)}{K}} B(1 - \alpha/2, 1 - \beta/2).$$

这样的正的 η 存在，当且仅当 $\sqrt{\frac{K}{2(1+v^2)}} L > B\left(1 - \frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\beta}{2}\right)$ 。借助 Gamma 函数 Γ 与 Beta 函数 B 之间的关系，这就等价于前面给出的条件。

我们可以像上面那样表示一个解 φ （也就是说：观众不会在回到就座状态之前一直保持站立）（见图 4）：

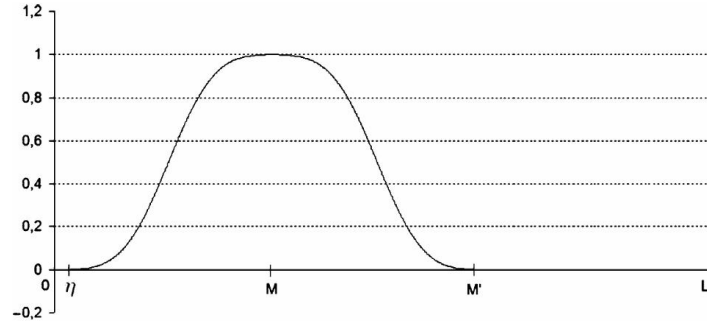


图 4. $\alpha = \beta = 1.5$

备注：一般来说，这个解并不是唯一的，原因有两个。第一个原因是显然的：在上述证明中， η 可以在某个区间内任意取值。不过，由于问题在圆环上的平移不变性，这种“非唯一性”只是因为可以整体平移解，所以并不具有实际意义。第二个原因是：观众在重新坐下之前，可能会保持站立一段时间。

4.3 平均场博弈 vs 描述性模型

所有用来刻画墨西哥人浪的模型，都假设观众像自动机一样行动：他们会根据所处的情境来执行动作，可能还会带有对前一段时间的一点记忆。这种“自动运行”的逻辑，对于产生一种墨西哥人浪式的人群运动来说完全足够，甚至也足以导出与我们上面写下的同样形式的动力学方程：如果这样的事情还没人做过，那么我们自己也完全可以这么做。

我们的模型与基于自动机智能体的模型（例如文献[19]）的区别，在于我们赋予智能体的行为怎样的含义。在自动机模型中，动作是由情境直接“规定”的；而在我们的模型中，智能体产生同样的动作，是经过这样一个过程的结果：他们要思考其他智能体的行为，这些行为之间的一致性，以及在这些行为之下自己的偏好。

得到的结果与“智能体就是自动机”时相同，这一点不应让人失望：这里并不能用“简约原则”（parsimony principle）来说事；仅仅因为智能体的表现好像自动机，这并不是不给他们的行为赋予另一种含义的理由。而且，这并不仅仅是出于伦理学上的考虑。的确，如果想研究墨西哥人浪的稳定性，以及偏离均衡时的行为，那就有必要回到一开始用来构造出这个方程的机制本身。因而，如果墨西哥人浪被扰动了，例如有几排观众因为某个外生原因而没有动作，那么基于自动机的模型通常会在这种情形下给出一种混乱的（erratic）行为预测；而在我们的平均场博弈模型中，智能体在稍作思考之后，会以一种方式行动，从而使得墨西哥人浪这种集体运动得以重新建立。

由此可见，我们对行为赋予的含义，会帮助我们理解：在各种过程遭到扰动时，人们应该会做出怎样的反应。

5. 人口分布模型

5.1 引言

现在我们来考虑一个人口（或群体）分布模型。该模型是连续时间、连续状态空间平均场博弈模型的一个原型。许多模型都可以从这个模型推导出来。更重要的是，接下来将引入的稳定性概念，可能是处理前向/后向结构稳定性问题中最相关的概念之一，尤其适用于时间相互依赖的平均场博弈模型。这个被称为教导式稳定性（**eductive stability**）的稳定性概念，能够帮助我们绕开前向/后向结构带来的困难，特别是在寻找平均场博弈 PDE 的数值解时。

接下来我们只呈现该模型的一些方面。读者若想更深入了解不同稳定性概念，可参考文献[23]；若想看更完整并推广到多群体问题的呈现，可参考[22]。

5.2 框架

我们考虑一个由连续体表示的庞大数量的个体。这些个体具有地理、经济、社会等特征，我们假设这些特征可以用有限个 n 维度来表示。一个简单例子是个体在空间中的位置坐标；另一个例子是个体所采用的技术类型。总之，我们假设每个个体的特征可以表示为 $X \in \mathbb{R}^n$ 。

每个个体都可以控制自己的特征。我们选择一种情形：个体希望像他们的同伴。要变得更像别人，个体需要在状态空间 \mathbb{R}^n 中移动。若个体想进行大小为 α 的移动，将支付一个二次型成本 $\frac{|\alpha|^2}{2}$ 。此外，这种控制并不完美，我们加入布朗噪声。用数学语言（对个体 i ）可以写成：

$$\sup_{(\alpha_s)_{s \geq 0}, X_0^i = x} \mathbb{E} \left[\int_0^\infty \left(g(t, X_t^i, m_t) - \frac{|\alpha(s, X_s^i)|^2}{2} \right) e^{-\rho s} ds \right]$$

$$dX_t^i = \alpha(t, X_t^i) dt + \sigma dW_t^i$$

其中 m 是社会/特征空间中个体的分布；函数 g 描述想变得像别人的愿望（依问题类型不同而不同）。对 g 进行不同设定可得到不同结果，例如：

$$g(t, x, m) = -\beta(x - \int y m(t, y) dy)^2$$

$$g(t, x, m) = -\beta \int (x - y)^2 m(t, y) dy$$

$$g(t, x, m) = \ln(m(t, x))$$

为简化论述并与引言中引用的文献保持一致，我们考虑对数情形，即 g 是 m 的局部函数。此时控制问题可以用微分形式重写，从而得到平均场博弈理论的核心 PDE 系统：

$$(HJB) \quad \partial_t u + \frac{\sigma^2}{2} \Delta u + \frac{1}{2} |\nabla u|^2 - \rho u = -\ln(m)$$

$$(Kolmogorov) \quad \partial_t m + \nabla \cdot (m \nabla u) = \frac{\sigma^2}{2} \Delta m$$

在这种情况下，最优控制为 $\alpha(t, X_t) = \nabla u(t, X_t)$ 。

这组 PDE 的关键性质在于前向/后向维度：HJB 与所有 Bellman 方程一样带有后向特征（有限时域时会有终端条件 $u(T, x) = u_T(x)$ ；扩散项也可以视为后向热方程的味道）。相反，运输方程是前向的，它根据个体的最优选择把初始分布 $m(0, x)$ 向前推进。我们能清楚看到这种前向/后向结构对应了个体的推理方式：他们假设 m 的动态，然后优化得到最优控制 ∇u 。

该行为推动总体分布的演化。最终的自洽来自于我们假设个体对分布 m 的预期是理性且准确的——这是平均场博弈的典型思路。

5.3 稳态解

我们首先对稳态解 (stationary solutions) 感兴趣。二次型成本与对数型效用的框架，使得我们能够得到 u 的显式二次型解和 m 的高斯解，如下面的结果所示。

命题 7 (高斯解): 假设 $\rho < \frac{2}{\sigma^2}$ ，那么存在三个常数 $s^2 > 0, \eta > 0, \omega$ 以及任意 $\mu \in \mathbb{R}^n$ ，使得如果 m 是一个 n 维高斯随机变量 $\mathcal{N}(\mu, s^2 I_n)$ 对应的概率密度，并取 $u(x) = -\eta |x - \mu|^2 + \omega$ ，那么 (u, m) 构成该问题的一组解。

这三个常数为：

- $s^2 = \frac{\sigma^4}{4-2\rho\sigma^2}$
- $\eta = \frac{1}{\sigma^2} - \frac{\rho}{2} = \frac{\sigma^2}{4s^2}$
- $\omega = -\frac{1}{\rho} \left[\eta n \sigma^2 - \frac{n}{2} \ln \left(\frac{2\eta}{\pi\sigma^2} \right) \right]$

证明:

首先注意， m 的稳态方程 (Kolmogorov 方程) 可以改写为：

$$\nabla \cdot (m \nabla u - \frac{\sigma^2}{2} \nabla m) = 0$$

因此，我们可以把注意力限制在满足下式的解上：

$$m \nabla u = \frac{\sigma^2}{2} \nabla m$$

因此，只要把 $m = K \exp(\frac{2}{\sigma^2} u)$ 代入 HJB 方程即可，其中常数 K 取值使 m 的确是一个概率分布 (即积分为 1)。

我们寻找如下形式的解：

$$u(x) = -\eta |x - \mu|^2 + \omega.$$

将其代入 HJB 得到：

$$2\eta^2 |x - \mu|^2 + \rho\eta |x - \mu|^2 - \rho\omega - \eta n \sigma^2 = -\ln(K) + \frac{2\eta |x - \mu|^2}{\sigma^2} - \frac{2\omega}{\sigma^2}$$

成立的第一个条件是：

$$2\eta^2 + \rho\eta = \frac{2\eta}{\sigma^2}$$

$$\iff \eta = \frac{1}{\sigma^2} - \frac{\rho}{2}$$

第二个条件来自 m 必须是概率分布。这显然要求 $\eta > 0$ ，而假设 $\rho\sigma^2 < 2$ 保证了这一点。进一步有：

$$\begin{aligned} K \exp\left(\frac{2\omega}{\sigma^2}\right) \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{-2\eta}{\sigma^2} |x - \mu|^2\right) &= K \exp\left(\frac{2\omega}{\sigma^2}\right) \left(\frac{\pi\sigma^2}{2\eta}\right)^{\frac{n}{2}} = 1 \\ \Rightarrow \rho\omega + \eta n \sigma^2 &= \frac{n}{2} \ln\left(\frac{2\eta}{\pi\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

由此可解出 ω 。

从这个关于 u 的解，我们可以找到 m 的解。我们确实知道 m 是一个概率分布函数，并且 m 由以下式子给出：

$$m(x) = K \exp\left(\frac{2u(x)}{\sigma^2}\right)$$

因此， $m(x)$ 是一个 n 维高斯密度，其方差为 $s^2 I_n$ ，其中 $s^2 = \frac{\sigma^2}{4\eta} = \frac{\sigma^4}{4-2\rho\sigma^2}$ 。

从先验上讲，并没有任何东西保证解一定存在，因为通常被很好研究的情形多对应于递减的 g ，而不是像这里这样递增的 g 。另一方面，也没有证据表明解是唯一的。首先，该问题具有平移不变性，因此为了讨论唯一性我们必须对问题进行定位/局部化。这种局部化可以通过把 $\ln(m(t, x))$ 替换为 $\ln(m(t, x)) - \delta x^2$ ($\delta > 0$) 来实现，并且仍可得到同类型的结果。即便局部化后，也不能保证唯一性（尽管局部化对其他目的会有帮助）。虽然我们证明唯一性，但我们仍然关注解的稳定性问题。既然我们已得到稳态结果，那么研究动力学的第一步就是研究稳定性。

5.4 稳定性结果

5.4.1 两种稳定性概念

两种类型的稳定性与我们的问题相关。我们将把第一种称为“物理稳定性”，把第二种称为“教导式稳定性”。物理稳定性的概念对读者而言可能看起来更为标准。第二种，即教导式稳定性，指向 Roger Guesnerie 以及其他作者（例如[26]）在理性预期经济学背景下关于稳定性的许多论文。这些论文启发了平均场博弈中的教导式稳定性概念。

如果我们在 $[0, T]$ 上考虑一个问题，并且在两端给出稳态解作为条件（给定 $u(T, \cdot) = u^*$ 且 $m(0, \cdot) = m^*$ ），当我们扰动边界条件 (u^*, m^*) 时，我们可以观察会发生什么（当 $T \rightarrow \infty$ 时）。与这种在0时刻对 m 的扰动以及在 T 时刻对 u 的扰动相关的稳定性就是物理稳定性，我们参考[23]以获得完整的研究。第二种可能性是加入一个变量 θ （虚拟时间），并考虑一个不同的、纯前向的动力系统，其稳态均衡与我们正在寻找的那个相同。如果在这个新的动力系统中存在收敛（当 $\theta \rightarrow \infty$ 时），在这个系统中我们通过在 $\theta = 0$ 施加任意条件来把后向方程中的时间反转，那么我们就把这称为教导式稳定性。在下文中，我们关注教导式稳定性，更精确地说是局部教导式稳定性，因为它对发展和论证数值方法非常有帮助。

5.4.2 教导式稳定性

上面简要描述的物理稳定性，本质上与方程的前向/后向结构紧密相关。在这里，我们想要绕开这种前向/后向结构，并引入一个虚拟时间 θ ，它将在这样的意义上是纯前向的：我们考虑如下新的 PDE 系统：

$$\begin{aligned}\partial_\theta u &= \frac{\sigma^2}{2} u'' + \frac{1}{2} u'^2 - \rho u + \ln(m) \\ \partial_\theta m &= \frac{\sigma^2}{2} m'' - (m u')'\end{aligned}$$

让我们考虑两个“不太远离”与 $\mu = 0$ 相关的稳态均衡 (u^*, m^*) 的“初始猜测”（ $u(\theta = 0, x)$ 和 $m(\theta = 0, x)$ ），如命题 7 中所定义：

$$\begin{aligned}m(0, x) &= m^*(x)(1 + \varepsilon\psi(0, x)) \\ u(0, x) &= u^*(x) + \varepsilon\varphi(0, x)\end{aligned}$$

我们将对这些方程进行线性化。经过简单计算我们得到如下线性 PDE：

$$\partial_{\theta}\varphi = \frac{\sigma^2}{2}\varphi'' - 2\eta x\varphi' - \rho\varphi + \psi$$

$$\partial_{\theta}\psi = \frac{\sigma^2}{2}\psi'' + 2\eta x\psi' - \varphi'' + \frac{x}{s^2}\varphi'$$

把这些线性化的 PDE 写得更方便的一种方式引入算子 $\mathcal{L}: f \mapsto \mathcal{L}f = -\frac{\sigma^2}{2}f'' + 2\eta xf'$, 于是我们得到关于二元组 (φ, ψ) 的如下方程:

命题 8:

$$\partial_{\theta}\varphi = -\mathcal{L}\varphi - \rho\varphi + \psi$$

$$\partial_{\theta}\psi = -\mathcal{L}\psi + \frac{2}{\sigma^2}\mathcal{L}\varphi$$

证明:

这只是变量之间联系的一个直接推论, 也就是 $s^2 = \frac{\sigma^2}{4\eta}$ 。

现在, 我们将使用刚刚引入的算子 \mathcal{L} 的性质。为此我们需要使用与空间 $L^2(m^*(x)dx)$ 相关的 Hermite 多项式的一些性质 (更多细节见[1])。

命题 9 (Hermite 多项式): 我们将 $L^2(m^*(x)dx)$ 的第 n 个 Hermite 多项式定义为:

$$H_n(x) = s^n \frac{1}{\sqrt{n!}} (-1)^n \exp\left(\frac{x^2}{2s^2}\right) \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2s^2}\right)$$

多项式族 $(H_n)_n$ 构成 Hilbert 空间 $L^2(m^*(x)dx)$ 的一个正交归一基。Hermite 多项式 H_n 是算子 \mathcal{L} 的特征向量, 并且:

$$\mathcal{L}H_n = 2\eta n H_n$$

为了研究线性化方程, 我们将考虑空间 $L^2(m^*(x)dx)$, 并考虑在 Hermite 多项式基上的分解。因为该问题在 θ 中是纯前向的, 我们需要对每一个坐标有两个负的特征值。

为此, 让我们引入矩阵 $(B_n)_n$:

$$B_n = \begin{pmatrix} -(\rho + 2\eta n) & 1 \\ \frac{n}{s^2} & -2\eta n \end{pmatrix}$$

引理 10 (B_n 的特征值): 让我们考虑 $n \geq 2$ 。 B_n 的特征值 $\xi_n^1 < \xi_n^2$ 都是负的, 并且:

$$\xi_n^{1,2} = \frac{1}{2} \left[-\rho - 4\eta n \pm \sqrt{\rho^2 + \frac{4n}{s^2}} \right]$$

命题 10: 让我们假设初始条件 $\varphi(0, \cdot)$ 和 $\psi(0, \cdot)$ 属于 Hilbert 空间 $H = L^2(m^*(x)dx)$ 。让我们对 $n \geq 2$ 考虑函数 (φ_n, ψ_n) , 它们满足:

$$\begin{pmatrix} \partial_{\theta}\varphi_n \\ \partial_{\theta}\psi_n \end{pmatrix} = B_n \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

其中 $\varphi_n(0)$ 等于 $\varphi(0, \cdot)_n = \langle H_n, \varphi(0) \rangle$, 并且 $\psi_n(0)$ 等于 $\psi(0, \cdot)_n = \langle H_n, \psi(0) \rangle$ 。我们有:

对固定的 θ 且当 n 趋于 ∞ 时:

$$\begin{aligned}\varphi_n(\theta) &= \mathcal{O}(|\varphi_n(0)|e^{\xi_n^2\theta}) \\ \psi_n(\theta) &= \mathcal{O}(\sqrt{n}|\varphi_n(0)|e^{\xi_n^2\theta})\end{aligned}$$

特别地,

$$\forall \theta > 0, \forall k \in \mathbb{N}, (n^k \varphi_n(\theta))_n \in l^1(\subset l^2), (n^k \psi_n(\theta))_n \in l^1(\subset l^2)$$

证明:

经过直接的代数变形, 我们得到:

$$\begin{pmatrix} \varphi_n(\theta) \\ \psi_n(\theta) \end{pmatrix} = A_n e^{\xi_n^2 \theta} \begin{pmatrix} 1 \\ a_n \end{pmatrix} + B_n e^{\xi_n^2 \theta} \begin{pmatrix} 1 \\ b_n \end{pmatrix}$$

其中,

$$a_n = \rho + 2\eta n + \xi_n^1, \quad b_n = \rho + 2\eta n + \xi_n^2$$

现在, 为了找到这两个常数, 我们需要使用 $\varphi_n(0)$ 和 $\psi_n(0)$ 上的条件:

$$\begin{cases} \varphi_n(0) = A_n + B_n \\ \psi_n(0) = a_n A_n + b_n B_n \end{cases}$$

因此:

$$\begin{cases} A_n = \frac{b_n \varphi_n(0) - \psi_n(0)}{b_n - a_n} \\ B_n = \frac{a_n \varphi_n(0) - \psi_n(0)}{a_n - b_n} \end{cases}$$

利用 $a_n \sim -\frac{\sqrt{\eta}}{\sigma}\sqrt{n}$ 且 $b_n \sim \frac{\sqrt{\eta}}{\sigma}\sqrt{n}$ 这一事实, 我们可以推导出当 n 趋于无穷时这些常数的渐近行为:

$$A_n \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(0)}{2}, \quad B_n \sim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n(0)}{2}$$

因此, 由于 $\xi_n^1 < \xi_n^2$,

$$\begin{aligned}\varphi_n(\theta) &= \mathcal{O}(|\varphi_n(0)|e^{\xi_n^2\theta}) \\ \psi_n(\theta) &= \mathcal{O}(\sqrt{n}|\varphi_n(0)|e^{\xi_n^2\theta})\end{aligned}$$

这两个估计证明了结果。这些估计表明解将比初始条件更加正则。

命题 11 (线性化 PDE 的求解):

假设:

- 初始条件 $\varphi(0, \cdot)$ 和 $\psi(0, \cdot)$ 属于 Hilbert 空间 $H = L^2(m^*(x)dx)$ 。
- $\int \psi(0, x)m^*(x)dx = 0$ (如果 m 的初始猜测是一个概率分布函数, 这一点得到保证)。
- $\int x\varphi(0, x)m^*(x)dx = 0$ (如果初始猜测是偶函数, 这一点得到保证)。
- $\int x\psi(0, x)m^*(x)dx = 0$ (如果初始猜测是偶函数, 这一点得到保证)。

让我们通过如下方式定义 $(\varphi_n)_n$ 和 $(\psi_n)_n$:

- $\varphi_0(\theta) = \varphi_0(0)e^{-\rho\theta}$ 且 $\psi_0(\theta) = 0$ 。
- $\varphi_1(\theta) = \psi_1(\theta) = 0$ 。
- $\forall n \geq 2$, φ_n 和 ψ_n 如前一个命题中所定义。

那么 $\varphi(\theta, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\theta) H_n(x)$, $\psi(\theta, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(\theta) H_n(x)$ 在 H 中是良好定义的,

属于 C^∞ , 是这些 PDE 的解, 并且满足初始条件。

证明:

首先, 上述命题保证了两个函数 φ 和 ψ 是良好定义的, 属于 C^∞ , 并且我们可以对这些表达式进行形式上的求导。然后, 前三个条件可以被翻译为 $\psi_0(0, \cdot) = 0$ 、 $\varphi_1(0, \cdot) = 0$ 以及 $\psi_1(0, \cdot) = 0$, 因此在时间 0 的条件得到了验证。PDE 被满足这一事实来自 φ_n 和 ψ_n 的定义, 也来自这样一个事实: 由于前一个命题的估计, 我们可以在求和号下进行求导。

命题 12 (局部教导式稳定性):

假设:

- 初始猜测 $\varphi(0, \cdot)$ 和 $\psi(0, \cdot)$ 属于 Hilbert 空间 $H = L^2(m^*(x)dx)$ 。
- $\int \psi(0, x)m^*(x)dx = 0$ (如果 m 的初始猜测是一个概率分布函数, 这一点得到保证)。
- $\int x\varphi(0, x)m^*(x)dx = 0$ (如果初始猜测是偶函数, 这一点得到保证)。
- $\int x\psi(0, x)m^*(x)dx = 0$ (如果初始猜测是偶函数, 这一点得到保证)。

那么 PDE 的解 (φ, ψ) 以下述意义收敛:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \|\varphi(\theta, \cdot)\|_{L^2(m^*(x)dx)} = 0 \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \|\psi(\theta, \cdot)\|_{L^2(m^*(x)dx)} = 0$$

证明:

我们基本上想要证明:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\varphi_n(\theta)|^2 \rightarrow_{\theta \rightarrow +\infty} 0, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |\psi_n(\theta)|^2 \rightarrow_{\theta \rightarrow +\infty} 0$$

这实际上是先前证明的估计以及 Lebesgue 控制收敛定理的一个纯粹推论。

这些稳定性结果是有趣的, 但为了得到它们所需要的对称性条件可能看起来很繁琐。确实, 当涉及把这种方法学应用于寻找稳态解时, 我们显然需要一个对初始条件不那么敏感的结果。一个好的推进方式是考虑开头引入的那个没有平移不变性的情形, 也就是 $\delta > 0$ 的局部化情形。

5.4.3 局部化情形中的教导式稳定性

在教导式稳定性的证明中, 有必要在初始猜测上施加对称性条件。由于 B_1 是奇异的, 这些条件是确保稳定性所必需的。如果人们想要对更一般的初始猜测得到稳定性结果, 直观的想法就是打破该问题的平移不变性。

有趣的是, 我们先前引入了局部化。这个局部化思想可以再次被使用, 以得到更一般的稳定性结果。如果我们像之前一样将问题围绕 0 进行中心化, 我们可以看到原问题与带有一个额外项 $-\delta x^2$ (该项将问题在 0 附近局部化) 的问题之间唯一相关的差异, 是依照如下方程取决于 δ 的正常数 η :

$$2\eta^2 - \eta \left(\frac{2}{\sigma^2} - \rho \right) = \delta$$

现在, 在这个背景下我们可以证明对于 $n \geq 1$, B_n 的特征值都是负的 (记住在 $\delta = 0$ 的情形中我们需要 n 大于 2 才有这些性质)。

当 $\delta > 0$ 时, 这个结果可以被用来证明一般的稳定性结果。确实, 如果将条件:

$$\begin{cases} \int x\psi(0, x)m^*(x)dx = 0 \\ \int x\varphi(0, x)m^*(x)dx = 0 \end{cases}$$

用 $\delta > 0$ 来替换，那么我们所有的稳定性结果都可以完全以同样的方式被重写，这是很直接的。

因此，在这个局部化的背景下（并且在线性近似意义下），如果我们从一个接近某个稳态均衡的二元组 (u, m) 出发，那么当使用这个纯前向的 PDE 系统时，随着 $\theta \rightarrow \infty$ 将会收敛到稳态均衡。在数值上，这一点非常有趣，并且教导式方法给出了非常好的结果，无论是用于寻找稳态均衡，还是用于推广这种寻找动态均衡的方法（见[23]）。

5.5 数值方法

平均场博弈的前向/后向结构在寻找数值解时是一个相当大的问题。人们可以尝试通过交替求解后向方程和前向方程来寻找一个不动点 (u, m) ，但是先验地并不能保证能够用这种方式找到一个解。然而，前面证明的教导式稳定性性质可以被改造用来设计一种数值方法。其他作者也已经发展了若干方法，感兴趣的读者例如可以参见[3]。

我们将展示我们用于寻找稳态解的方法。值得注意的是，如果将拉普拉斯算子替换为热算子（根据情境可以是前向或后向），那么下面给出的数值“配方”仍然可以用于寻找动态解（见[22,23]）。

5.5.1 稳态均衡

首先，让我们回忆刻画一个稳态均衡的两条方程：

$$(HJB) \quad \frac{\sigma^2}{2}\Delta u + \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \rho u = -g(x, m)$$

$$(Kolmogorov) \quad \nabla \cdot (m \nabla u) = \frac{\sigma^2}{2}\Delta m$$

其中，现在 g 不再被假定为对数函数。

Hamilton–Jacobi–Bellman 方程可以通过变量替换 $\beta = \exp(\frac{u}{\sigma^2})$ 被简化，我们得到：

$$(HJB)' \quad \frac{\sigma^2}{2}\Delta \beta = \beta \left[\rho \ln(\beta) - \frac{1}{\sigma^2}g(x, m) \right]$$

$$(Kolmogorov)' \quad \nabla \cdot \left[\sigma^2 \left(m \frac{\nabla \beta}{\beta} \right) \right] = \frac{\sigma^2}{2}\Delta m$$

方程 $(HJB)'$ 和 $(Kolmogorov)'$ 可以通过对 Δ 算子取逆的方式写成对数值求解更实用的形式。这可以在 Kolmogorov 方程中通过将拉普拉斯算子限制在概率分布函数上来实现（因为在实际中我们将自己限制在只含有限个谐波的傅里叶级数上），于是我们得到：

$$(Kolmogorov)' \quad -m + \left[\frac{\sigma^2}{2}\Delta \right]^{-1} \left(\sigma^2 \nabla \cdot \left(m \frac{\nabla \beta}{\beta} \right) \right) = 0$$

这在 HJB 方程中做不到，但对于任意 $\epsilon > 0$ ，我们可以对 $\frac{\sigma^2}{2}\Delta - \epsilon Id$ 这样的算子取逆。

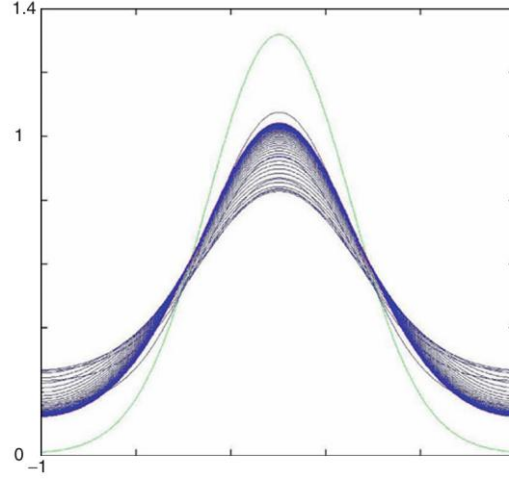
于是得到：

$$(HJB)' \quad -\beta + \left[\frac{\sigma^2}{2}\Delta - \epsilon Id \right]^{-1} \left(\beta \left[\rho \ln(\beta) - \frac{1}{\sigma^2}g(x, m) - \epsilon \right] \right) = 0$$

利用这些方程，我们可以采用教导式稳定性的思想，并通过求解下面引入虚拟时间 θ 的方程来尝试获得解：

$$\begin{cases} \partial_{\theta} m = -m + \left[\frac{\sigma^2}{2} \Delta \right]^{-1} \left(\sigma^2 \nabla \cdot \left(m \frac{\nabla \beta}{\beta} \right) \right) \\ \partial_{\theta} \beta = -\beta + \left[\frac{\sigma^2}{2} \Delta - \epsilon Id \right]^{-1} \left(\beta \left[\rho \ln(\beta) - \frac{1}{\sigma^2} g(x, m) - \epsilon \right] \right) \end{cases}$$

在数值上，这些方程相当容易求解。下面给出一个例子，其中 $g(x, m) = \sqrt{m} - \delta x^2$ ， $\sigma^2 = 0.4$ ， $\rho = 0.4$ ， $\delta = 0.5$ ，定义域为 $[-1, 1]$ （我们取 $\epsilon = \rho/3$ ）（图 5）。



我们看到，在 θ 中迭代一定步数之后，分布 $m(\theta, \cdot)$ 收敛到一个极限分布 m ，它是成为稳态均衡的一个很好候选。

5.5.2 推广

该方法在实践中对稳态解效果非常好。除了快速、有效之外，我们所谓的教导式算法还可以被推广，用来寻找不仅是稳态解、也包括均值场博弈 PDE 的动态解。简而言之，其思路就是在引入虚拟时间 θ 之前，用对热算子的取逆来替代对拉普拉斯算子的取逆。[22,23]中完成了这一点。

6. 资产管理公司与排名效应

6.1 引言

当一个人把自己的储蓄委托给资产管理人时，他会基于自己的风险偏好来做这件事。也就是说，他会尽量寻找一个资产管理人，使其管理方式在收益/风险等方面尽可能接近如果不委托他人、由自己管理时会采取的策略。然而，这位被委托的资产管理人并不只是以满足现有客户为唯一目标。他可能还希望增加客户数量，从而扩大管理资产规模；或者作为个人，他也可能希望表现得更好，以提高自己的奖金。

我们提出一个模型：它从经典的 Markowitz 模型（见[41]）或 CARA-高斯模型出发，在资产管理人之间加入一个分类/排名的维度。也就是说，每位资产管理人除了其通常的目标之外，还会想要优化一个额外的函数，这个函数依赖于他在所有资产管理人中（以收益衡量的）排名/分类位置。

6.2 模型

因此，我们的模型考虑一个连续体的资产管理人：在时间 0 时，他们都拥有同样的单位资金需要管理。这些管理人会在无风险资产和风险资产之间进行投资以构建自己的组合。他们的投资组合中，有一个比例 θ 投到风险资产，一个比例 $1 - \theta$ 投到无风险资产。无风险资产的回报为 r 。风险资产的回报记为 $r + \varepsilon$ ，其中 ε 是一个随机变量，我们将假设它服从正态分布，但其均值和方差还需要进一步指定。

为了构建组合，管理人将优化如下形式的目标函数：

$$\mathbb{E}[u(X) + \beta \tilde{C}]$$

其中，

- $u(x) = -\exp(-\lambda x)$ 是一种 CARA（常绝对风险厌恶）效用函数。
- $X = 1 + r + \theta \varepsilon$ 是基金在日期 1 的价值。
- β 衡量管理人之间竞争这一“额外目标”的相对重要性。
- \tilde{C} 是代表排名/分类的随机变量，取值在 $[0,1]$ 中：0 表示最差表现，1 表示某位管理人获得的最好表现。

现在还需要说明管理人之间的差异来自哪里。即使他们都有相同的可投资金额，他们对风险资产回报（即关于 ε ）的信念依然不同。我们假设大家对波动率有共识（即方差一致），差异仅体现在 ε 的均值上：如果某个管理人认为 $\varepsilon \sim \mathcal{N}(\varepsilon, \sigma^2)$ ，那么他就是类型 ε 。在下文中我们将假设这些信念 ε 在人群中按某个概率密度函数 f 分布（例如可以假设为偶函数）。

6.3 分解

为了解决这个问题，我们考虑一个类型为 ε 的代理人。他把投资组合中比例为 θ 的部分配置到风险资产上的最优性条件如下：

命题 13 (FOC _{ε}):

$$\begin{aligned} (FOC_{\varepsilon}) \quad & -\lambda^2 \sigma^2 \left(\theta - \frac{\varepsilon}{\lambda \sigma^2} \right) \exp \left(-\lambda(1+r) - \lambda \theta \varepsilon + \frac{1}{2} \lambda^2 \theta^2 \sigma^2 \right) \\ & + \beta m(\theta) C(\varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

其中 m 是均衡时人群中 θ 的分布（更准确说是密度）；并且 $C(\cdot) = 2[N(\frac{\cdot}{\sigma}) - \frac{1}{2}]$ ， N 是标准正态 $\mathcal{N}(0,1)$ 的累积分布函数。

证明：

资产管理人最大化：

$$\mathbb{E}_\epsilon \left[u(1 + r + \theta \tilde{\epsilon}) + \beta \tilde{C} \right]$$

容易看出： $\tilde{C} = 1_{\tilde{\epsilon} > 0} M(\theta) + 1_{\tilde{\epsilon} \leq 0} (1 - M(\theta))$, 其中 M 表示权重 θ 的累积分布函数。

另外，

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\epsilon [u(1 + r + \theta \tilde{\epsilon})] &= -\mathbb{E}_\epsilon [\exp(-\lambda(1 + r + \theta \tilde{\epsilon}))] \\ &= -\exp\left(-\lambda(1 + r + \theta \epsilon) + \frac{1}{2} \lambda^2 \theta^2 \sigma^2\right) \end{aligned}$$

因此，最优 θ 是下式的极大点：

$$-\exp\left(-\lambda(1 + r + \theta \epsilon) + \frac{1}{2} \lambda^2 \theta^2 \sigma^2\right) + \beta \mathbb{E}_\epsilon [1_{\tilde{\epsilon} > 0} M(\theta) + 1_{\tilde{\epsilon} \leq 0} (1 - M(\theta))]$$

对上式求导，得到 ϵ 类型管理人的一阶条件：

$$\begin{aligned} -\lambda^2 \sigma^2 \left(\theta - \frac{\epsilon}{\lambda \sigma^2} \right) \exp\left(-\lambda(1 + r) - \lambda \theta \epsilon + \frac{1}{2} \lambda^2 \theta^2 \sigma^2\right) \\ + \beta \mathbb{E}_\epsilon [1_{\tilde{\epsilon} > 0} - 1_{\tilde{\epsilon} \leq 0}] m(\theta) = 0 \end{aligned}$$

但是，

$$\mathbb{P}_\epsilon(\tilde{\epsilon} > 0) - \mathbb{P}_\epsilon(\tilde{\epsilon} \leq 0) = 2 \left[\mathbb{P}_\epsilon(\tilde{\epsilon} > 0) - \frac{1}{2} \right] = 2 \left[\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0, 1) > -\frac{\epsilon}{\sigma}\right) - \frac{1}{2} \right] = C(\epsilon)$$

因此得到结论。

命题 14 ($\epsilon \mapsto \theta(\epsilon)$ 的微分方程)： 考虑函数 $\epsilon \mapsto \theta(\epsilon)$ ，它给出每一种类型的最优风险资产比例 θ 。如果 θ 是一阶连续可导 (C^1)，那么它满足如下微分方程：

$$-\lambda^2 \sigma^2 \left(\theta - \frac{\epsilon}{\lambda \sigma^2} \right) \exp\left(-\lambda(1 + r) - \lambda \theta \epsilon + \frac{1}{2} \lambda^2 \theta^2 \sigma^2\right) \frac{d\theta}{d\epsilon} + \beta f(\epsilon) C(\epsilon) = 0 \quad (*)$$

此外， θ 必须满足 $\theta(0) = 0$ 。

证明：

为了从类型的分布 f 推到均衡时 θ 的分布 m ，我们需要一个一致性 (coherence) 方程：

$$m(\theta) \theta'(\epsilon) = f(\epsilon)$$

现在，对不同类型的最优一阶条件 (FOC $_\epsilon$) 乘以 $\theta'(\epsilon)$ ，我们就得到想要的常微分方程。

又因为 $C(0) = 0$ ，(FOC $_0$) 简化为：

$$-\lambda^2 \sigma^2 \theta \exp\left(-\lambda(1 + r) + \frac{1}{2} \lambda^2 \theta^2 \sigma^2\right) = 0$$

其唯一解为 $\theta = 0$ 。如果回到 Markowitz 问题 ($\beta = 0$)，解很简单： $\theta_0(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\lambda \sigma^2}$ 。当

$\beta > 0$ 时，我们的问题可写为：

$$\theta'(\epsilon) = \frac{\beta C(\epsilon) f(\epsilon)}{\lambda^2 \sigma^2 \exp(-\lambda(1 + r + \theta(\epsilon) \epsilon) + \frac{1}{2} \lambda^2 \sigma^2 \theta(\epsilon)^2)} \frac{1}{\theta(\epsilon) - \theta_0(\epsilon)}, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \theta(\epsilon) = 0$$

这不是一个常见的 Cauchy 初值问题，因为在 0 处的条件只能以极限形式有意义。此外我们应当指出：解将是奇函数，因此可以只研究 $\epsilon > 0$ 。同时 $\theta(\epsilon)$ 必须是递增的，这意味着

$\theta(\varepsilon) > \theta_0(\varepsilon)$ ，因此在我们的模型中，风险承担会比 Markowitz 模型更高。

命题 15（存在性与唯一性）： 存在一个唯一的函数 θ ，它在满足方程(*)的同时，还满足以下两个附加约束：

- $\theta(\varepsilon) > \theta_0(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\lambda\sigma^2}$
- $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta(\varepsilon) = 0$

证明：

让我们从唯一性的证明开始。让我们考虑该问题的一个解 θ ，并引入函数 z 定义为：

$$z(\varepsilon) = \frac{1}{2}\theta(\varepsilon)^2 - \theta_0(\varepsilon)\theta(\varepsilon)$$

如果我们想反过来把这个等式倒过来，并得到 θ 作为 z 的函数，那么我们得到：

$$\theta(\varepsilon) = \theta_0(\varepsilon) \pm \sqrt{\theta_0(\varepsilon)^2 + 2z(\varepsilon)}$$

但是由于 $\theta(\varepsilon) > \theta_0(\varepsilon)$ ，我们显然可以倒过来该等式并得到：

$$\theta(\varepsilon) = \theta_0(\varepsilon) + \sqrt{\theta_0(\varepsilon)^2 + 2z(\varepsilon)} := \Theta(\varepsilon, z(\varepsilon))$$

现在，如果我们对定义 z 的等式求导，我们有：

$$\begin{aligned} z'(\varepsilon) &= \theta'(\varepsilon)\theta(\varepsilon) - \theta_0(\varepsilon)\theta'(\varepsilon) - \frac{1}{\lambda\sigma^2}\theta(\varepsilon) = \theta'(\varepsilon)(\theta(\varepsilon) - \theta_0(\varepsilon)) - \frac{1}{\lambda\sigma^2}\theta(\varepsilon) \\ &\Rightarrow z'(\varepsilon) = \frac{\beta C(\varepsilon)f(\varepsilon)}{\lambda^2\sigma^2 \exp(-\lambda(1+r+\theta(\varepsilon)\varepsilon) + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\theta(\varepsilon)^2)} - \frac{1}{\lambda\sigma^2}\theta(\varepsilon) \\ &\Rightarrow z'(\varepsilon) = \frac{\beta C(\varepsilon)f(\varepsilon)}{\lambda^2\sigma^2 \exp(-\lambda(1+r+\Theta(\varepsilon, z(\varepsilon))\varepsilon) + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\Theta(\varepsilon, z(\varepsilon))^2)} \\ &\quad - \frac{1}{\lambda\sigma^2}\Theta(\varepsilon, z(\varepsilon)) \end{aligned}$$

从 Cauchy-Peano 定理我们知道，这个方程存在一个唯一的解 z ，它满足 $z(0) = 0$ 。这个解在 0 的一个邻域 V 上定义。由此我们可以证明，在邻域 V 上，我们可以局部地定义 $\theta(\varepsilon) = \theta_0(\varepsilon) + \sqrt{\theta_0(\varepsilon)^2 + 2z(\varepsilon)}$ 。这个解是唯一的，因为定义 z 的微分方程在 $\varepsilon > 0$ 时有唯一解（由于单调性）。因此，由于在 0 之外没有问题（也就是说 Cauchy-Lipschitz 定理可以直接应用），唯一性得证。

现在，我们想证明在整个定义域上存在解。为此让我们考虑如下 ODE：

$$z'(\varepsilon) = \frac{\beta C(\varepsilon)f(\varepsilon)}{\lambda^2\sigma^2 \exp(-\lambda(1+r+\Theta(\varepsilon, z(\varepsilon))\varepsilon) + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2\Theta(\varepsilon, z(\varepsilon))^2)} - \frac{1}{\lambda\sigma^2}\Theta(\varepsilon, z(\varepsilon))$$

我们知道存在一个局部解 z （在 0 的一个邻域 V 上定义），满足该方程并且 $z(0) = 0$ 。

如果我们把 θ_{loc} 定义在 V 上（或者更准确地说，定义在包含 0 的 V 的一个开子集上，因为它并不是先验就在 V 上定义的）为：

$$\theta_{loc}(\varepsilon) = \theta_0(\varepsilon) + \sqrt{\theta_0(\varepsilon)^2 + 2z(\varepsilon)}$$

那么，我们就得到了方程(*)的一个局部解，它满足这两个附加条件。现在让我们考虑 V 中的某个 $\hat{\varepsilon}$ 。我们可以对定义域 $\{(\varepsilon, \theta) \mid \varepsilon > 0, \theta > \theta_0(\varepsilon)\}$ 上的方程(*)应用 Cauchy-Lipschitz 定理，并以 Cauchy 条件 $\theta(\hat{\varepsilon}) = \theta_{loc}(\hat{\varepsilon})$ 来考虑该问题的极大解。这个极大解显然满足 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \theta(\varepsilon) = 0$ 。我们想说明的是：事实上这个极大定义域不存在上界。

假设存在这样一个上界 $\bar{\varepsilon}$ 。由于 θ 是递增的，我们要么有：

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \bar{\varepsilon}} \theta(\varepsilon) = +\infty,$$

或者

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \bar{\varepsilon}} \theta(\varepsilon) = \theta_0(\bar{\varepsilon})$$

我们将说明这两种情况都是不可能的。

先假设 $\lim_{\varepsilon \rightarrow \bar{\varepsilon}} \theta(\varepsilon) = +\infty$ 。那么，我们可以假设存在一个区间 $(\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})$ ，使得对所有 $\varepsilon \in (\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})$ ，

都有 $\theta(\varepsilon) > \theta_0(\varepsilon) + 1$ 。因此，在 $(\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon})$ 上我们有：

$$\begin{aligned} \theta'(\varepsilon) &\leq \frac{\beta C(\varepsilon) f(\varepsilon)}{\lambda^2 \sigma^2 \exp(-\lambda(1+r+\theta(\varepsilon)\varepsilon) + \frac{1}{2}\lambda^2 \sigma^2 \theta(\varepsilon)^2)} \\ \Rightarrow \theta'(\varepsilon) &\leq \frac{\beta C(\varepsilon) f(\varepsilon)}{\lambda^2 \sigma^2} \exp\left(\lambda(1+r) + \lambda\theta(\varepsilon)\varepsilon - \frac{1}{2}\lambda^2 \sigma^2 \theta(\varepsilon)^2\right) \end{aligned}$$

但是 $\lambda\theta(\varepsilon)\varepsilon - \frac{1}{2}\lambda^2 \sigma^2 \theta(\varepsilon)^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}$ ，所以

$$\forall \varepsilon \in (\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}), \theta'(\varepsilon) \leq \frac{\beta C(\varepsilon) f(\varepsilon)}{\lambda^2 \sigma^2} \exp\left(\lambda(1+r) + \frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}\right)$$

因此，

$$\forall \varepsilon \in (\underline{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}), \theta(\varepsilon) \leq \theta(\underline{\varepsilon}) + \int_{\underline{\varepsilon}}^{\varepsilon} \frac{\beta C(\xi) f(\xi)}{\lambda^2 \sigma^2} \exp\left(\lambda(1+r) + \frac{\xi^2}{2\sigma^2}\right) d\xi$$

这意味着我们不可能有 $\lim_{\varepsilon \rightarrow \bar{\varepsilon}} \theta(\varepsilon) = +\infty$ 。

现在，让我们考虑剩下的可能性 $\lim_{\varepsilon \rightarrow \bar{\varepsilon}} \theta(\varepsilon) = \theta_0(\bar{\varepsilon})$ 。该情形也不可能的直观原因是：当 θ 穿过与解 θ_0 相关的那条直线时，斜率应当是无穷大，而这不可能发生。为了更精确地说明这一点，让我们考虑如下 ODE：

$$\varepsilon'(\theta) = \frac{\lambda^2 \sigma^2 \exp(-\lambda(1+r+\theta\varepsilon(\theta)) + \frac{1}{2}\lambda^2 \sigma^2 \theta^2)}{\beta C(\varepsilon(\theta)) f(\varepsilon(\theta))} (\theta - \theta_0(\varepsilon(\theta)))$$

让我们在带有 Cauchy 条件 $\varepsilon(\theta_0(\bar{\varepsilon})) = \bar{\varepsilon}$ 的情况下，在定义域 $(\mathbb{R}^{++})^2$ 上对上述方程应用 Cauchy-Lipschitz 定理。我们在一个小区间 $[\theta_0(\bar{\varepsilon}) - \eta, \theta_0(\bar{\varepsilon}) + \eta]$ 上有一个局部解，并且该解在 $\theta_0(\bar{\varepsilon})$ 处呈现一个局部最小值。然而，我们可以构造上述 Cauchy 问题的另一个解，因为极大解 θ 的反函数 ε 满足该方程，并且可以延拓以满足 Cauchy 条件。因此，由于存在局部最小值，这两个解是不同的，从而产生矛盾。

结论是：极大区间不存在上界。现在，由对称性可得该解定义在 \mathbb{R} 上。

命题 16 (二阶条件)： 令

$$\Gamma(\varepsilon, \theta) = -\lambda^2 \sigma^2 \left(\theta - \frac{\varepsilon}{\lambda \sigma^2} \right) \exp\left(-\lambda(1+r) - \lambda\theta\varepsilon + \frac{1}{2}\lambda^2 \theta^2 \sigma^2\right) + \beta m(\theta) C(\varepsilon)$$

考虑由前一命题给出的唯一函数 $\theta(\varepsilon)$ ，它满足对任意 ε ， $\Gamma(\varepsilon, \theta(\varepsilon)) = 0$ 。以及上一命题中的条件。我们有：

$$\partial_{\theta}\Gamma(\varepsilon, \theta(\varepsilon)) < 0$$

证明：

首先，对一阶条件 $\Gamma(\varepsilon, \theta(\varepsilon)) = 0$ 关于 ε 求导，得到：

$$\partial_{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon, \theta(\varepsilon)) + \theta'(\varepsilon)\partial_{\theta}\Gamma(\varepsilon, \theta(\varepsilon)) = 0$$

因此， $\partial_{\theta}\Gamma(\varepsilon, \theta(\varepsilon))$ 的符号与 $-\partial_{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon, \theta(\varepsilon))$ 的符号相同，所以我们需要证明 $\partial_{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon, \theta(\varepsilon)) > 0$ 。但是，

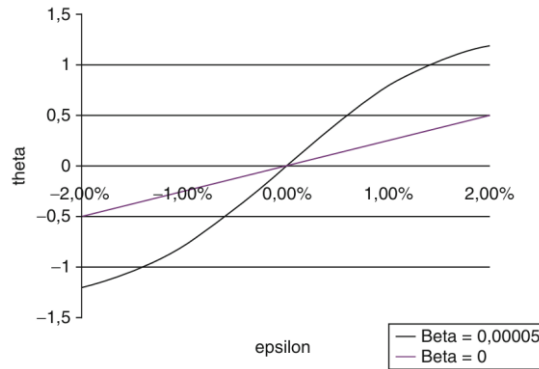
$$\begin{aligned} \partial_{\varepsilon}\Gamma(\varepsilon, \theta) = & \lambda \exp\left(-\lambda(1+r) - \lambda\theta\varepsilon + \frac{1}{2}\lambda^2\theta^2\sigma^2\right) \left(1 + \lambda^2\sigma^2\theta\left(\theta - \frac{\varepsilon}{\lambda\sigma^2}\right)\right) \\ & + \beta m(\theta)C'(\varepsilon) \end{aligned}$$

当 $\theta = \theta(\varepsilon)$ 时，该表达式为正，因为 $\theta(\varepsilon) \geq \frac{\varepsilon}{\lambda\sigma^2}$ 。

6.4 例子

现在既然已经证明了解的存在性与唯一性，我们就可以尝试用数值方法计算一个解。为了了解曲线的形状，确实有必要在一个具体例子中计算函数 $\theta(\varepsilon)$ ，并将其与我们在非竞争情形下通常得到的线性函数 $\theta_0(\varepsilon)$ 进行比较。这正是我们现在要做的。

让我们考虑如下情形。我们取 $r = 2\%$ 、 $\sigma = 20\%$ 且 $\lambda = 1$ 。我们取 $s = 1\%$ 作为与 f 相关的标准差，并令 β 很小： $\beta = 5 \times 10^{-5}$ 。通过数值计算，我们得到如下结果：



结论是：引入平均场 m 会颠覆 Markowitz 模型。Markowitz 模型实际上假设每个参与人的推理方式就好像他是孤立的，但在实践中这并不成立。也许令人惊讶的是，即便竞争影响（ β ）非常小，也会完全改变解的形状，并促使资产管理人采取更高风险的头寸——无论是看涨还是看跌的方向。

7. 增长的平均场博弈模型与薪资的帕累托分布

7.1 模型机制简介

我们将用平均场博弈的方法，基于人力资本构建一个经济增长模型。核心想法是：考虑一个人数非常多的人群，他们会努力提升自己的人力资本以提高工资。提升人力资本通常有两个效果：第一，它会提升能力，从而提升工资；第二，在其他条件不变的情况下，它会减少自己所面临的竞争对手数量，因此也会提高工资。要同时利用这两个效果显然需要付出成本。但这个成本对不同个体并不相同：一般而言，资质较差的人比起那些接近经济学所谓“技术前沿”的人，更容易通过培训来提升人力资本。

我们考虑大量参与人，每个人都拥有我们记作 q 的人力资本。人群中的人力资本在总体中按一个分布函数 m 来分布（对应的累计分布函数记为 F ，而 $\bar{F} = 1 - F$ 表示尾部分布）。

现在定义工资函数。若采用 Cobb–Douglas 生产函数，可以清楚地写出工资为：

$$w(q, m(t, q)) = \begin{cases} C \frac{q^\alpha}{m(t, q)^\beta}, & \text{if } q \text{ is in the support of } m(t, \cdot) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

如果我们假设 m 随 q 递减，就能看出上面提到的两个效果。

提升人力资本的成本也需要明确，我们将其表示为：

$$H\left(\frac{dq}{dt}, \bar{F}(t, q)\right) = \frac{E}{\varphi} \frac{\left(\frac{dq}{dt}\right)^\varphi}{\bar{F}(t, q)^\delta}, \quad \forall q \text{ in the support of } m(t, \cdot)$$

其中 E 是一个常数，表示人力资本“生产机制”的低效率程度； δ 与 φ 也是常数。这个形式意味着：成本既取决于人力资本的增长强度 a （因为 $dq_t = a(t, q_t)dt$ ），也取决于你离技术前沿有多近——这点由尾部分布 \bar{F} 体现。

参数 $\alpha, \beta, \delta, \varphi$ 都为正，为了后续计算顺利，我们假设 $\alpha + \beta = \varphi$ 、 $\beta = \delta$ 且 $\varphi > 1$ ，于是只剩两个自由度。

7.2 优化问题及相关的 PDE

现在我们转向个体的优化问题。我们假设他们会随着时间最大化自己的财富；如果我们处在一个没有流动性约束的理想化世界里，这样的假设是合理的。

个体的问题是如下的最大化：

$$\max_{(q_s), q_0=q} \int_0^\infty [w(q_s, m(s, q_s)) - H(a(s, q_s), \bar{F}(s, q_s))] e^{-rs} ds$$

为了解这个问题，我们必须先给出人力资本的初始分布。若我们令初始人力资本服从帕累托分布，即

$$m(0, q) = k \frac{1}{q^{k+1}} \mathbf{1}_{q \geq 1},$$

我们会看到初始工资分布也同样是帕累托分布，这至少在分布的尾部与现实相符。因此我们采用这一设定。

因为这是一个确定性的优化问题，我们其实可以用经典的 Euler–Lagrange 工具来解。只是由于后面会引入不确定性，我们更倾向于用平均场博弈的工具来处理。

为此，我们引入 Bellman 函数（价值函数） J ：

$$J(t, q) = \max_{(q_s), q_t=q} \int_t^\infty [w(q_s, m(s, q_s)) - H(a(s, q_s), \bar{F}(s, q_s))] e^{-r(s-t)} ds.$$

于是关于 J 和 m 的平均场博弈 PDE 写成：

$$(\text{HJB})w(q, m(t, q)) + \partial_t J + \max_a (a \partial_q J - H(a, \bar{F}(t, q))) - rJ = 0,$$

$$(\text{Kolmogorov}) \partial_t m(t, q) + \partial_q (a(t, q) m(t, q)) = 0,$$

其中 $a(t, q) = \text{ArgMax}_a (a \partial_q J - H(a, \bar{F}(t, q)))$ 是最优控制。

利用前面选定的具体函数形式，我们得到：

$$\frac{Cq^\alpha}{m(t, q)^\beta} + \frac{\varphi - 1}{\varphi} \frac{1}{E^{\frac{1}{\varphi-1}}} \bar{F}(t, q)^{\frac{\beta}{\varphi-1}} (\partial_q J)^{\frac{\varphi}{\varphi-1}} + \partial_t J - rJ = 0,$$

$$\partial_t m(t, q) + \partial_q \left(\left(\frac{\bar{F}(t, q)^\beta}{E} \partial_q J(t, q) \right)^{\frac{1}{\varphi-1}} m(t, q) \right) = 0,$$

最优控制为：

$$a(t, q) = \left(\frac{\bar{F}(t, q)^\beta}{E} \partial_q J(t, q) \right)^{\frac{1}{\varphi-1}}$$

7.3 解

我们可以给出显式解。

命题 17 (PDE 的求解)： 如果 $\varphi(\varphi - 1) < \beta k$ ，那么存在唯一的三元组 (J, m, γ) ，它同时满足前面的两个 PDE 以及关于最优控制函数的附加方程： $a(t, q) = \gamma q$

解具有如下形式：

$$m(t, q) = k \frac{\exp(\gamma k t)}{q^{k+1}} \mathbf{1}_{q \geq \exp(\gamma t)},$$

$$J(t, q) = B \exp(-\beta k \gamma t) q^{\beta k + \varphi} \mathbf{1}_{q \geq \exp(\gamma t)},$$

其中 γ 与 B 的关系为 $\gamma = \left(\frac{B(\beta k + \varphi)}{E} \right)^{\frac{1}{\varphi-1}}$ 。

证明：

首先，这个附加条件等价于 q_t 具有恒定增长率，因此我们得到上面给出的帕累托型分布 $m(t, \cdot)$ 。因此，当 $q \geq \exp(\gamma t)$ 时， $\partial_q J(t, q)$ 满足：

$$\partial_q J(t, q) = E(\gamma q)^{\varphi-1} \bar{F}(t, q)^{-\beta} = E(\gamma q)^{\varphi-1} e^{-\beta k \gamma t} q^{\beta k}$$

于是（积分常数取 0）：

$$J(t, q) = \frac{E}{\beta k + \varphi} \gamma^{\varphi-1} e^{-\beta k \gamma t} q^{\beta k + \varphi}$$

将其代入 HJB 方程后可得到一条关于 γ 的代数关系：

$$\begin{aligned} \frac{C}{k^\beta} q^{\beta k + \varphi} e^{-\beta k \gamma t} + \frac{\varphi - 1}{\varphi} E \gamma^\varphi q^{\beta k + \varphi} e^{-\beta k \gamma t} \\ - \beta k \gamma \frac{E}{\beta k + \varphi} \gamma^{\varphi-1} e^{-\beta k \gamma t} q^{\beta k + \varphi} - r \frac{E}{\beta k + \varphi} \gamma^{\varphi-1} e^{-\beta k \gamma t} q^{\beta k + \varphi} = 0 \end{aligned}$$

由此可以得到：

$$\begin{aligned} \frac{C}{k^\beta} + \frac{\varphi - 1}{\varphi} E \gamma^\varphi - \beta k \frac{E}{\beta k + \varphi} \gamma^\varphi - r \frac{E}{\beta k + \varphi} \gamma^{\varphi-1} &= 0 \\ \frac{C}{k^\beta} + \frac{(\varphi - 1)\varphi - k\beta}{\varphi(k\beta + \varphi)} E \gamma^\varphi - r \frac{E}{\beta k + \varphi} \gamma^{\varphi-1} &= 0 \end{aligned}$$

并由 $\varphi(\varphi - 1) < \beta k$ 推知 γ 唯一。

尽管我们无法严格证明全局唯一性，但这个解非常有趣： γ 实际上对应人力资本的增长

率，并且对所有人相同；此外，解 m 总是帕累托型的，这很值得注意，因为现实中的工资分布尾部确实具有帕累托特征。

7.4 潜在机制

之所以会出现一条规律的增长路径，我们有必要花点时间解释其背后的经济机制。首先，人们改变（提升）自身人力资本的基本原因来自两个效应。第一是纯粹工资效应：在其他条件不变时，人力资本越高，工资越高。但仅靠这一点，并不能解释为何人力资本会以一个恒定增长率持续改进。要得到更有说服力的解释，还需要一个“逃离竞争效应”。

在总体中随机抽取的某个个体，会受到那些人力资本比他更低的人（设为 \tilde{q} ）的威胁。确实，如果这些较低人力资本的人中有一部分通过提升自己的人力资本，最终达到 \tilde{q} ，他们就会在劳动力市场上与该个体竞争，从而压低他的工资。这个效应是我们模型中连续增长的来源。由于这里有一个连续体的个体群体，因此对任何给定个体来说，总会存在潜在威胁。因此，我们认为那种“如果收益太小，人们就不会提升人力资本”的熊彼特式效应在这里被弱化甚至“失效”了，因为总有潜在竞争者存在，所以达尔文式的竞争效应占主导。

这个模型还说明，增长过程不仅仅来自那些靠近技术前沿的“创新者/研究者”，实际上它涉及整个群体；尤其是那些离技术前沿较远的人，通过提升自身人力资本去“威胁”领先者，反而在推动整体的增长。这个过程因此非常“平均场博弈式”，因为它把一种整体的社会维度带入了个人决策之中。

7.5 一个随机化推广

现在我们转向一个更随机的模型。

我们假设人力资本满足 $dq_t = a(t, q_t) dt + \sigma q_t dW_t$ ，其中 W 是对所有代理人共同的布朗运动。于是如果我们把 q_t^m 记为最小人力资本（这实际上是一个新的状态变量，它按照 $dq_t^m = a(t, q_t^m) dt + \sigma q_t^m dW_t$ 演化，这里 a 是最优控制），我们就会发现 Bellman 函数可以写成 $J = J(t, q, q^m)$ ，相应的 PDE 为：

$$\begin{aligned} \text{Max}_a C \frac{q^\alpha}{m(t, q)^\beta} - \frac{E}{\varphi} \frac{a^\varphi}{\bar{F}(t, q)^\beta} - rJ \\ + \partial_t J + a \partial_q J + \frac{\sigma^2}{2} q^2 \partial_{qq}^2 J + a' \partial_{q^m} J + \frac{\sigma^2}{2} q^{m^2} \partial_{q^m q^m}^2 J + \sigma^2 q q^m \partial_{qq^m}^2 J = 0 \end{aligned}$$

其中 a' 就是 $a(t, q_t^m)$ ，在该最优化中被视为外生的。

最优控制为：

$$a(t, q) = \left(\frac{\bar{F}(t, q)^\beta}{E} \partial_q J(t, q) \right)^{\frac{1}{\varphi-1}}$$

引理 11：若 $a(t, q) = \gamma q$ ，那么 q 的概率分布函数为 $m(t, q) = k \frac{(q_t^m)^k}{q^{k+1}} \mathbf{1}_{q \geq q_t^m}$ 。

证明：

假设 $a(t, q) = \gamma q$ ，则有

$$\begin{aligned} q_t &= q_0 \exp \left(\left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right) = q_0 q_t^m \\ \Rightarrow m(t, q) &= k \frac{\exp \left(k \left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma k W_t \right)}{q^{k+1}} \mathbf{1}_{q \geq \exp \left(\left(\gamma - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right)} \\ &= k \frac{(q_t^m)^k}{q^{k+1}} \mathbf{1}_{q \geq q_t^m} \end{aligned}$$

命题 18 (PDE 的求解): 如果 $\varphi(\varphi - 1) < \beta k$ 且 $r > \frac{\sigma^2}{2}\varphi(\varphi - 1)$, 那么存在唯一一个与该问题相容的增长率 γ , 并且价值函数 J 具有形式

$$J(q, q^m) = B q^{\beta k + \varphi} (q^m)^{-\beta k} \mathbf{1}_{q \geq q^m}$$

其中 γ 与 B 满足 $\gamma = \left(\frac{B}{E}(\beta k + \varphi)\right)^{\frac{1}{\varphi-1}}$ 。

此外, γ 由下式给出:

$$\frac{\varphi(\varphi - 1) - \beta k}{\varphi} \gamma^\varphi = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\varphi(\varphi - 1)\right) \gamma^{\varphi-1} - \frac{C(\varphi + \beta k)}{E k^\beta}$$

证明:

首先, 若 $a(t, q) = \gamma q$, 则

$$\partial_q J(t, q, q^m) = E(\gamma q)^{\varphi-1} \bar{F}(t, q)^{-\beta} = E \gamma^{\varphi-1} q^{\beta k + \varphi - 1} (q_t^m)^{-\beta k}$$

由此推出解确实具有上面写的形式, 且 $B = \frac{E}{\beta k + \varphi} \gamma^{\varphi-1}$ 。

若要确定 B 或 γ , 需要把 J 代入 HJB 方程, 得到一系列化简, 最终得到上面关于 γ 的代数方程:

$$\begin{aligned} & q^{\beta k + \varphi - 1} (q^m)^{-\beta k} \left[\frac{C}{k^\beta} - \frac{E}{\varphi} \gamma^\varphi - rB + \gamma(\beta k + \varphi)B - \beta k \gamma B \right. \\ & \left. + \frac{\sigma^2}{2} B ((\beta k + \varphi)(\beta k + \varphi - 1) + (-\beta k)(-\beta k - 1) + 2(\beta k + \varphi)(-\beta k)) \right] = 0 \\ & \frac{C}{k^\beta} - \frac{E}{\varphi} \gamma^\varphi + \gamma \varphi B - \left(r - \varphi(\varphi - 1) \frac{\sigma^2}{2}\right) B = 0 \\ & \frac{C(\beta k + \varphi)}{E k^\beta} - \frac{\beta k + \varphi}{\varphi} \gamma^\varphi + \varphi \gamma^\varphi - \left(r - \varphi(\varphi - 1) \frac{\sigma^2}{2}\right) \gamma^{\varphi-1} = 0 \\ & \frac{\varphi(\varphi - 1) - \beta k}{\varphi} \gamma^\varphi = \left(r - \varphi(\varphi - 1) \frac{\sigma^2}{2}\right) \gamma^{\varphi-1} - \frac{C(\varphi + \beta k)}{E k^\beta} \end{aligned}$$

与之前一样, 在我们的假设下该方程有唯一解。

这些解的一个推论: 即便这种风险对每个人都是共同的, 引入风险因子后增长会更高。

8. 数学视角

上面的例子清楚地表明，在平均场博弈模型的语境中会出现许多类型的非线性问题。对其中大多数而言，这些非线性问题都是由耦合的非线性方程所构成的新系统；当智能体的状态用连续变量描述且时间变量也是连续的情形下，它们就是偏微分方程系统。在所有情形中，这类系统的主要新颖之处在于组成该系统的方程具有一种混合的“前向-后向”性质。一般来说，无法直接动用任何经典的数学理论来处理它们。此外，例如在“偏微分”的情形中，所需新数学理论的范围相当广，因为许多经典的偏微分方程（如 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程、非线性热方程或多孔介质方程、Vlasov 或 Boltzmann 等动力学方程、流体力学中的可压缩 Euler 方程、一般的半线性椭圆方程、量子力学中的 Hartree 方程、最优输运问题，等等）事实上都是平均场博弈系统的特殊情形！这并不令人意外，因为所有这些模型都以一种“平均场”的方式产生于力学与物理模型之中，其中“平均场”概括了大量相互作用粒子（可被视为无法选择自身行动的智能体）的集体或平均行为。

平均场博弈模型的新颖性以及问题“范围”的广阔，解释了为什么平均场博弈理论正在提出大量（且微妙的）数学问题。

最后，我们给出一个简要（因此远非穷尽）的议题清单：这些议题已经有了一定的数学理解（尽管仍有许多开放问题）。

从 N 人纳什均衡严格推导平均场博弈模型的正当性：J.-M. Lasry 与 P.-L. Lions（见 [34-37] 与 [38]）发展了一个一般性的解析框架，可将平均场博弈方程从 N 人纳什均衡中严格推导出来。该框架本身具有独立的数学价值，并且还有许多其他应用（如维度趋于无穷时方程的极限、相互作用粒子系统、随机偏微分方程的大偏差，等等）。

当参与者数量 $N \rightarrow \infty$ 时关于 N 的渐近展开：对一大类平均场博弈模型例子，这种展开已被严格建立（至少在极限平均场博弈系统解的唯一性成立的情形下）。

存在性与正则性结果：对于很大一类模型，解的存在性与正则性如今已经得到了理解。

唯一性结果：已识别出两种唯一性区间：小时间跨度（small horizon）的情形，以及“单调”耦合的情形。并且也有非唯一性的例子表明，似乎不存在其他一般性的唯一性区间。

稳定性问题：当然，与唯一性密切相关的是解的稳定性问题；在唯一性区间内，稳定性确实成立。值得指出的是，稳定性有许多不同的概念（数据的小扰动、时间跨度趋于无穷，等等），都具有研究意义。

将平均场博弈模型解释为控制问题：对相当一类平均场博弈模型，可以证明平均场博弈系统对应于某个偏微分方程的全局最优控制问题。粗略地说，此时该系统可被描述为刻画系统“状态”与其“对偶状态”的方程之间的耦合。

数值方法：已提出多种数值方法或思路，例如对系统进行直接离散化（有限元等）、对相关控制问题进行离散化（若确有对应的控制问题，见上）、采用各种迭代策略，或加入一个额外的时间变量（“松弛时间”）。

极限情形：一个相关的重要极限情形可被称为“规划问题”。不同于“经典”平均场博弈模型那样给定智能体群体的初始状态（“密度”）以及每个智能体的终端“成本-收益”剖面，这里改为同时规定群体（智能体）在时间区间起点与终点的状态（也就是两端都给定）。在这种情况下，未知的终端“成本-收益”函数可以被理解为对每个参与者的激励方案，从而引导群体达到期望的最终状态。此前的大多数数学结果如今都可以拓展到这一“极限”类别的模型中。